

# **Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard<sup>1</sup>**

**Bruno D'Amore - Berta Martini**

**Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica  
Dipartimento di Matematica  
Università di Bologna**

**318.** D'Amore B., Martini B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175. [Questo articolo è stato pubblicato in lingua spagnola: *Números*, 32, 1997, 26-32. In lingua francese: *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 95-118. In lingua inglese in: Gagatsis A. (ed) (1999). *A multidimensional approach to learning in mathematics and science*. Nicolsia: Intercollege. 3-24].

*Summary. In this paper we study the influence and the role: of a "clause" in the didactic contract that has become known as "the formal delegation", of the general model for problems and of intuitive models of the process of solving standard school problems, in one particular case, derived from the well-known experiences of Schoenfeld.*

---

<sup>1</sup> Lavoro eseguito con il contributo economico del M.U.R.S.T. (60%) e del C.N.R. (contratto n° 996.00196.CT1).

## 1. Un articolo di Schoenfeld sulla metacognizione.

### 1.1. Il problema di Schoenfeld.

Nel suo celeberrimo articolo del 1987 sulla metacognizione, Alan H. Schoenfeld cita brevemente un problema di tipo scolastico da lui definito «di divisione non intera» ([Schoenfeld, 1987], alle pagine 195-196)<sup>2</sup>. Riportiamo il testo di quel problema (che l'Autore inserisce in un discorso relativo a «preconcetti» e «misconcetti» da parte degli studenti ed alle conseguenti «misinterpretazioni di procedure che essi apprendono nelle loro classi»)<sup>3</sup>:

Un bus dell'esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo d'addestramento, quanti bus devono essere usati?

Dei 45000 studenti di scuola secondaria sottoposti alla prova, il 30% sbaglia la divisione e solo il 70% fa la divisione correttamente.

Prendiamo in esame solo questo 70%:

- il 29% del totale dice che occorrono 31 bus e che resta 12;
- il 18% del totale dice che servono 31 bus;
- solo il 23% del totale *controlla* il risultato della divisione sulla base della richiesta del problema e risponde che servono 32 bus.

In ripetute prove con studenti di tutti i livelli scolastici e con insegnanti di scuola dell'infanzia ed elementare, ma con un numero di soggetti nettamente inferiore a quello citato poco sopra, alcune nostre preliminari esperienze informali hanno dato esiti un po' diversi. Quando abbiamo concesso la possibilità di far uso della calcolatrice tascabile, poiché ovviamente l'operazione normalmente eseguita è la divisione 1128:36 che dà, con quello strumento!, il risultato 31,333333, noi abbiamo anche

---

<sup>2</sup> Il testo ed i risultati sono tratti dal *Third National Assessment of Educational Progress* [Carpenter, Lindquist, Matthews, Silver, 1983].

<sup>3</sup> Le traduzioni sono nostre.

ottenuto risposte del tipo  $31,3$  e del tipo  $31,\bar{3}$ , risposte non esplicitamente citate da Schoenfeld.

Il lavoro di questo Autore, tutto incentrato sulla metacognizione, lo porta a concludere che: «Nonostante la “storia di copertina” circa i bus, il calcolo ha poco o nulla a che fare con il mondo reale».

Chiacchierate informali con quei nostri soggetti che non avevano risposto, in modo pertinente, 32, specialmente con i più adulti, ci hanno convinto che alla base delle risposte non intere, quali che fossero, ci sono due clausole del contratto didattico: una che potremmo chiamare «di delega formale»; l'altra che consiste nel non sentirsi autorizzati a scrivere qualche cosa che non appare esplicitamente: se ottengo  $31,333333$ , non è lecito scrivere 32, che è un'altra cosa, non ottenuta esplicitamente.

Mentre questa seconda clausola è piuttosto nota, ed appare sotto varie forme, in genere legate alla problematica dei dati impliciti [Castro, Locatello, Meloni, 1996], cerchiamo di spiegare che cosa intendiamo per *clausola di delega formale*.

*Risolvere* un problema di tipo scolastico standard *coincide* con il *trovare la o le operazioni più adatte*; si tratta cioè di interpretare aritmeticamente il testo, passando dalla sua formulazione in lingua naturale, all'espressione aritmetica che porta dai dati al risultato<sup>4</sup>. Una volta eseguito questo passaggio-delega di traduzione e formalizzazione, il testo può anche essere dimenticato, non serve più, non è più oggetto di alcun controllo critico, logico o semantico e tutta la concentrazione e l'attenzione del risolutore si addensano allora sulla *esecuzione* di tale operazione, a mano o con la macchina calcolatrice. Quando tale esecuzione è terminata, producendo in qualche modo un risultato (come abbiamo detto, dopo calcoli manuali o con l'uso della calcolatrice), **quel risultato** è automaticamente interpretato come **la risposta** al problema, proprio a causa della *clausola di delega formale* detta sopra.

La problematica sollevata da Schoenfeld è di straordinaria importanza; essa chiama in causa la metacognizione, ma anche la capacità di

---

<sup>4</sup> Lasciamo perdere la complessa problematica seguente: nelle ore di matematica, ed in particolare nella formulazione dei testi dei problemi, si usa *davvero* una lingua naturale? Su questo si veda [Maier, 1993], [D'Amore, 1994] e [Laborde, 1995].

“controllo” tra strategia risolutiva adottata, risposta trovata e testo del problema (si veda [Pellerey, 1990]).

Tuttavia l’analisi fin qui fatta non ci sembra abbastanza approfondita. Ci ripromettiamo, in 2., di “scavare” un po’ più a fondo nel tema.

## 1.2. Altri esempi.

Poiché a scuola chi deve risolvere i problemi sono gli allievi, perché non sentire la loro voce? Questo potrebbe essere molto illuminante per capire che cosa lo studente si aspetti. Ecco allora la definizione di Lorenzo, un bambino di I elementare:

Secondo me il problema è un insieme di parole dove ci sono i numeri

(la “definizione” di Lorenzo è pubblicata in [Zan, 1991-1992]). La proposta di Lorenzo risulta essere la più condivisa tra gli studenti e tra tanti insegnanti... Essa denuncia in modo evidente il fatto che c’è un certo qual appiattimento del problema verso esercizi di routine, evidenziando, tra l’altro, scrive Zan: «una netta frattura fra problemi “reali” e problemi scolastici sia a livello di caratteristiche strutturali, che a livello di processi risolutivi».

Vediamo ancora due esempi, oltre a quello di Schoenfeld, di ricerche oramai classiche sui problemi nelle quali si evidenzia sia lo scollamento tra matematizzazione e realtà, sia il modello generale di problema nell’idea dei risolutori.

In [Nesher, 1980] si racconta di aver proposto a molti bambini il seguente testo:

Quale sarà la temperatura dell’acqua in un recipiente se ci metti una caraffa d’acqua a 80° ed una a 40° ?

Molti bambini rispondono: 120°. Eppure, se agli *stessi* bambini viene posto il problema: «Come diventa l’acqua se in un recipiente metti acqua calda e acqua fredda?», essi rispondono: «Tiepida». I problemi sembrano essere dunque più un «rituale scolastico» (così dice lo stesso Nesher) piuttosto che qualche cosa che abbia riferimento con una

qualche forma di realtà empirica. Più che contestualizzare la narrazione del testo, sembra quasi che il solutore cerchi solo di «inferire direttamente dalla formulazione verbale del testo del problema scolastico l'operazione matematica necessaria», dice sempre Nesher. Ed ecco ora l'esempio proposto a bambini fra i 5 ed i 12 anni e descritto in [Kilpatrick, 1987]:

Il signor Lorenz e 3 colleghi partono da Bielefeld alle 9 e viaggiano per 380 km fino a Francoforte, con una sosta di 30 minuti.

Una *storia* di questo genere, inserita in un contesto di problemi aritmetici standard, provoca nei bambini un atteggiamento risolutivo: essi, cioè, eseguono operazioni e danno una risposta ad una ... non-domanda; ci pare che questo atteggiamento rinforzi quanto dichiarato sopra circa l'idea di problema che la prassi scolastica produce.

Del resto:

- che il solutore non si faccia un'idea precisa della situazione descritta, è già stato oggetto di studio in [D'Amore, 1997];
- che ci sia uno scollamento quasi totale tra l'abitudine tutta formale desunta dalla prassi scolastica a risolvere problemi ed il contatto con situazioni concrete, è stato studiato in [Cassani, et alii, 1996].

## **2. Possibili cause del comportamento dei risolutori.**

Elenchiamo possibili campi d'indagine qualora si volessero approfondire le cause che possono spiegare il comportamento dei risolutori di fronte al problema dei bus e dei soldati:

1. clausola del contratto didattico «di delega formale»;
2. modello generale di problema e modello generale di risoluzione dei problemi;
3. modello mentale che ci si fa della situazione descritta nel testo;
4. modelli intuitivi delle operazioni;
5. concorso in tutto ciò dell'uso della lingua naturale.

Esamineremo questi punti uno per uno.

## 2.1. La clausola «di delega formale».

Circa la «delega formale » abbiamo sostanzialmente già detto; si tratta in buona approssimazione di una *convinzione implicita* che ci si fa nel tempo, con la reiterazione della prassi scolastica. Normalmente, infatti, la riuscita nella risoluzione dei problemi coincide con la scelta dell'operazione da eseguire; dunque, effettuata la traduzione-formalizzazione dal testo scritto all'espressione aritmetica risoltrice, il compito di carattere superiore (logico-strategico) è terminato e si passa alla fase meramente esecutiva, di carattere inferiore (algoritmico-esecutiva).

## 2.2 Modello generale di problema e di risoluzione dei problemi.

È ben noto che esiste, come abbiamo già visto in 1.2., presso gli studenti (e non solo), un modello generale di problema, anch'esso prodotto più dalla prassi che non da clausole esplicite del contratto didattico [Zan, 1991-92]. Come si può facilmente verificare, c'è un'interazione strettissima tra il modello generale di problema (come ci si aspetta che sia “confezionato”; come ci si aspetta che sia esplicitato; come ci si aspetta che sia proposto ed accolto; come il solutore pensa che il proponente lo voglia veder risolto; ...) ed il comportamento risolutivo [utilizzare tutti e soli i dati espressi numericamente nel testo (se possibile: nell'ordine in cui essi compaiono); cercare la o le operazioni invocate nel testo ( a volte anche solo grazie a parole o a frasi: *in tutto...*, *supera...*, ecc.); creare situazioni che neutralizzino il problema nel caso di eventuali dati impliciti o mancanti, ...]. Su temi di questo genere la letteratura è vastissima; ci limiteremo a citare [Boero, 1986] [Boero, Ferrari, 1988] [D'Amore, 1993] [Schubauer-Leoni, Ntamakiliro, 1994] [Castro, Locatello, Meloni, 1996]<sup>5</sup>.

È allora ovvio che, di fronte al problema dei bus e dei soldati, il risolutore non si aspetta di dover compiere un'azione (a livello meta) mai richiesta esplicitamente in precedenza, cioè quella del controllo della congruità del risultato numerico (ottenuto grazie all'operazione di

---

<sup>5</sup> Per una rassegna generale sulla ricerca negli anni tra il 1988 ed il 1995, ma nella sola Italia, sul tema della risoluzione dei problemi, si veda [D'Amore, Zan, 1996].

divisione) rispetto alla richiesta posta nella domanda esplicita del testo del problema proposto, con riferimento al mondo reale. Normalmente ciò non rientra nel modello generale di problema o di comportamento risolutivo standard richiesto.

### **2.3. Modello mentale che il solutore si fa della situazione descritta nel testo<sup>6</sup>.**

Quando si risolve un problema il cui testo è dato per iscritto, per prima cosa ci si fa un modello mentale della situazione descritta dal testo, ...o, almeno, così si usa dire. Sul fatto poi che questo “modello” sia più o meno confuso o preciso, il discorso è complicato ma, almeno in parte dovremo affrontarlo. Che, invece, il modello che ci si è fatto sia *davvero* un aiuto alla risoluzione del problema, così come normalmente si riteneva, è stato almeno in parte fortemente contestato da una recente ricerca già citata [D’Amore, 1997].

Sulla base di questi risultati è lecito chiedersi fino a che punto sia necessario farsi modelli mentali *dettagliati* delle situazioni descritte nei testi, quando si vogliono risolvere problemi. O, meglio, specificamente: il soggetto che riceve in consegna il compito di risolvere il problema dei bus e dei soldati, che immagine si fa della situazione? Immagina *davvero* 1128 soldati? Li immagina in formazione, tutti schierati o ammassati alla rinfusa? E dove? In un piazzale, per una strada o in caserma? Vestiti come? In tuta mimetica? Ma che esperienza ha lo studente di cose di questo tipo? E come immagina i bus? O tutte queste domande sono futili ed in realtà la situazione immaginata è sfumata, imprecisa, caotica e non dettagliata? Non è forse credibile che il potenziale risolutore deleghi alla operazione di divisione *anche* l’immagine mentale della situazione? O che l’immagine mentale si limiti ad un tratto, ad una parte del tutto? Per esempio: un gruppetto di soldati in fila che sta salendo su un solo bus?

---

<sup>6</sup> Qui possiamo permetterci di considerare come sinonimi le locuzioni: immagine mentale e modello mentale. Su questa terminologia (e su altra, ben più vasta, oramai diffusa tra i ricercatori in didattica della matematica), si può per esempio vedere [D’Amore, Frabboni, 1996]. Un interessante lavoro sulle relazioni tra procedimenti matematici e immagini mentali è [Pellerey, 1984].

Queste domande non sono oziose.

Se l'immagine mentale è *necessaria* per risolvere il problema, allora, stante l'*impossibilità* per chiunque di immaginare 1128 soldati, la delega detta in **2.1.** è un fatto *obbligato*, tanto che ciò potrebbe spiegare la non lettura all'indietro (cioè il mancato controllo semantico) una volta trovato il quoziente tra 1128 e 36.

Viene spontaneo allora tentare una nuova prova avente come caratteristiche:

- un problema dello stesso tipo, ma in una situazione facilmente immaginabile, diciamo in contesti di *script* già vissuti o potenzialmente tali
- con dati numerici così bassi da non rendere necessaria una delega dell'immagine mentale all'espressione aritmetica risolutiva.

Abbiamo allora elaborato la prova seguente:

Un'automobile trasporta 4 bambini. Se devono essere trasportati 6 bambini a scuola, quante automobili sono necessarie?

Ci si aspetta che, di fronte ad un testo siffatto, la situazione descritta possa essere facilmente immaginata, grazie all'influenza del vissuto; tanto che non avvenga neanche la delega detta in **2.1.** e praticamente non si esegua alcuna operazione: la risoluzione del problema dovrebbe dunque avvenire più perché ci si immagina la situazione che non eseguendo la divisione  $6:4$ . La risposta «2 automobili» dovrebbe essere data dalla totalità o quasi dei risolutori, ma non per un controllo semantico risposta-domanda, bensì per prova (per quanto solo immaginata) ed esperienza.

Se ciò fosse verificato,

- resterebbe dimostrato che la clausola detta in **2.1.** scatta solo quando il problema coinvolge numeri grandi o comunque situazioni problematiche non dominabili se non con operazioni formali, e non di necessità;
- resterebbe dimostrato che il modello generale di problema investe solo problemi di un certo grado di complessità formale;
- resterebbe dimostrato che il modello mentale della situazione può coincidere, in casi particolari, con la risoluzione stessa del problema.



Ovviamente, abbiamo eseguito la prova appena annunciata e riferiremo su modalità e risultati poco più avanti, in **3**.

## **2.4. Modelli intuitivi delle operazioni.**

Non è possibile, oggi, prescindere, nello studio del comportamento risolutivo dei problemi, dalle ricerche sui modelli intuitivi delle operazioni (tanto per avere una prima idea si veda [Deri, Sainati Nello, Sciolis Marino, 1983] [Fischbein, 1985] [Fischbein, 1992]). Il fatto è che il modello intuitivo che il potenziale risolutore ha dell'operazione che in qualche modo sente di dover scegliere allo scopo di risolvere il problema, gioca un ruolo di straordinaria importanza nel corso della risoluzione stessa. Basti pensare al celebre esempio descritto appunto in [Deri, Sainati Nello, Sciolis Marino, 1983] proprio sulla divisione:

15 amici comprano 5 kg di biscotti; quanti ne toccano a ciascuno?

che, proprio grazie al modello intuitivo della divisione, porta ancora in prima superiore oltre il 67% di studenti a scrivere 15:5 anziché 5:15; ed al seguente esempio adattato a partire da un altro analogo celeberrimo ideato da E. Fischbein:

Una bottiglia di aranciata che contiene 0,75 l costa 2 dollari.  
Qual è il prezzo di 1 l ?

In tal caso c'è un'interferenza forte tra la natura numerica di quel dato (0,75) e l'operazione di divisione che lo dovrebbe veder posto a divisore; l'interferenza porta, di fatto, a non far uso della divisione 2:0,75, non gradita, contraria al modello intuitivo, ma piuttosto a "passaggi formali", come la proporzione:

$$0,75 : 2 = 1 : x$$

In tal caso, la divisione 2:0,75 è alla fine accettata sì, ma *non* come operazione diretta, bensì come *risultato dell'applicazione di una regola*: il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi. A conferma che la causa del rifiuto di 2:0,75 sia legata all'interferenza detta, il problema:

Una bottiglia di aranciata che contiene 2 l costa 6 dollari. Qual è il prezzo di 1 l ?

è risolto immediatamente con la divisione 6:3 da tutti (o quasi) gli studenti (per tutto ciò si può vedere [D'Amore, 1993]).

Dunque, i modelli intuitivi delle operazioni, ed in particolare della divisione, influenzano concretamente e pesantemente gli atteggiamenti dei potenziali risolutori, al momento della scelta della strategia.

Diciamo anche che dalla divisione, operazione complessa e sempre temuta, “ci si aspetta”, per così dire, qualche risultato “strano”, qualche comportamento “anomalo”...; per esempio che il risultato non sia intero, che appaia qualche cifra dopo la virgola, insomma: qualche difficoltà in più. Ciò porta di conseguenza un atteggiamento di accettazione di un risultato come 31,333333, senza che ciò induca alcun bisogno di controllo critico...

Nel problema dei bambini e delle automobili, invece, non c'è bisogno di eseguire l'operazione 6:4 (che, se eseguita, darebbe anch'essa un risultato non intero): in questo caso riteniamo che il risolutore non faccia di fatto operazioni e che si limiti invece ad immaginare la scena, come in uno *script* già vissuto o potenzialmente tale. Ma se operazione c'è, allora si tratta forse piuttosto della sottrazione  $6-4=2$ , con la implicita, logica necessità di coinvolgere un'altra auto. Naturalmente ciò andava verificato con una prova empirica, seguita da interviste fatte *ad hoc* ai risolutori. È quanto abbiamo fatto: riferiremo in **3.** sulla metodologia e sui risultati.

## **2.5. L'uso della lingua naturale.**

Ricerche di questi ultimi anni sull'uso della lingua naturale in aula, nelle ore di matematica, ci inducono a pensare che il contesto linguistico sia di fondamentale importanza nella determinazione dei comportamenti e delle risposte degli allievi. (Come riferimenti bibliografici si può vedere [Laborde, 1982], [Maier, 1993], [D'Amore, 1994] e [Laborde, 1995], ma la letteratura in questo campo è vastissima). I due problemi, quello del bus e dei soldati e quello delle auto e dei bambini, sono strutturalmente simili ma anche entrambi espressi in linguaggio molto semplice, naturale, molto vicino a quello colloquiale. Da questo punto di vista, dunque, non dovrebbero sorgere differenze importanti indotte da diversi

registri o da modalità linguistiche. Tuttavia, il fatto che si parli di automobili (e non di bus dell'esercito), di bambini (e non di soldati), di scuola (e non di campo di addestramento), ci induce a pensare che il contesto evocato nel secondo problema renda la stessa lingua di descrizione più vicina a quella naturale. Insomma, non solo ci si immagina meglio la scena per i motivi detti in **2.3.**, ma un ruolo essenziale gioca anche il contesto linguistico indotto dai termini e dagli oggetti evocati.

Questo tema è però molto complesso e preferiamo qui non entrare in dettagli; ad esso dedicheremo ampio spazio in un'altra ricerca, già in corso avanzato, più specifica.

### **3. Modalità e risultati relativi al problema di Schoenfeld e di bambini e automobili.**

Le prove sono state effettuate in V elementare (allievi di 10-11 anni), in II media (allievi di 12-13 anni) ed in II liceo classico (allievi di 17-18 anni). In ogni caso, avevamo a disposizione due test distinti, quello di Schoenfeld e quello di bambini ed automobili, scritti ciascuno in alto in un foglio A4, nel quale c'era un piccolo spazio per apporre il nome ed un grande riquadro per scrivere la risoluzione e la risposta. In fondo al test di Schoenfeld si chiedeva: «Hai fatto uso della macchina calcolatrice?». In fondo al test di bambini e automobili si chiedeva: «Spiega come hai fatto a risolverlo». La consegna, comune a tutti, era di lavorare da soli in assoluto silenzio, di scrivere tutto quel che si voleva, per una durata di 10 minuti. Si avvertiva esplicitamente ogni volta che era lecito l'uso della macchina calcolatrice. In alcuni casi l'insegnante di classe usciva dall'aula, in altri vi restava, con la consegna di restare del tutto estraneo alla prova.

Al termine della prova scritta, mentre l'insegnante di classe rientrava o comunque riprendeva in consegna la classe, il ricercatore sceglieva rapidamente, in base al tipo di risposte fornite, alcuni allievi che venivano convocati uno alla volta in una vicina aula per una intervista personale. (Ciò vale solo per la V elementare e per la II media. Come vedremo tra breve, infatti, la prova in II liceo classico è stata

leggermente diversa). L'insegnante era invitato ad evitare che vi fosse scambio di informazioni tra chi era stato già intervistato e chi stava per esserlo, al rientro dei vari allievi in aula.

Esamineremo ora i risultati, differenziandoli per livello scolastico.

Avvertiamo che i testi tra « » sono protocolli autentici riportati fedelmente, o scritti (quando provengono dai test) o orali (quando provengono dalle interviste).

### **3.1. V elementare.**

Le prove sono state condotte a Castel San Pietro Terme (una classe) ed Osteria Grande (due classi) (entrambi i centri sono in provincia di Bologna)<sup>7</sup>; sono stati sottoposti alla prova in totale 53 allievi, dei quali 28 sulla prova di Schoenfeld e 25 sulla prova relativa a bambini ed automobili. Dei primi 28, sono stati poi intervistati 6 allievi; dei secondi 25, sono stati intervistati ancora 6 allievi. Dunque, il totale degli intervistati è 12.

Dei 28 allievi sottoposti alla prova di Schoenfeld:

sbagliano il calcolo o eseguono un'altra operazione e non la divisione: 8

dichiarano di non saperlo risolvere: 1<sup>8</sup>

effettuano correttamente il calcolo: 19

di questi fanno uso della macchina calcolatrice: 3

danno la risposta 31: 7

danno la risposta  $31,\bar{3}$ : 1

danno la risposta 31,333333: 1<sup>9</sup>

---

<sup>7</sup> Ringraziamo le insegnanti: Rita Negroni, Raffaella Pignattaro e Rita Sternativo, per aver messo a nostra disposizione le loro classi e la Direzione Didattica Statale di Castel San Pietro Terme per averci permesso di entrare nelle scuole in orario di lezione per effettuare le prove.

<sup>8</sup> Ritroviamo circa la stessa percentuale di Schoenfeld: contro il suo 30%, noi abbiamo il 32% di allievi che sbagliano o dichiarano di non saper risolvere il problema; ma occorre notare che le prove di Schoenfeld erano state fatte con ragazzi di 14-15 anni, le nostre con allievi di 10-11 anni.

danno la risposta 32: 10.

La risposta 32 appare dunque ben 10 volte (dunque, il 36%, contro il 23% di Schoenfeld) e sempre in allievi che *non* fanno uso della calcolatrice; di tali 10 allievi, 9 non dicono esplicitamente «32», ma sempre qualcosa del tipo: «31, ma restano 12 soldati e quindi si potrebbe usare un altro bus»; abbiamo anche il caso di un allievo che dichiara che: «Il problema non si può risolvere perché c'è un resto»: ci pare che questo esprima comunque consapevolezza del fatto che si deve trovare una risposta intera dato che deve esprimere un numero di bus; lo abbiamo allora considerato tra i 10 allievi che danno la risposta 32.

Prima di procedere all'esame dei risultati del secondo test, facciamo una considerazione sull'uso della calcolatrice: c'è quasi una reazione di *scandalo* alla nostra dichiarazione di poter usare la macchina calcolatrice; è ovvio che si tratta di un atteggiamento indotto da una *esplicita clausola del contratto didattico*; lo esprime molto bene la frase scritta di Deborah: «NO, perché se la uso non imparo a fare le operazioni. Perché non sempre avrai a disposizione la calcolatrice». Altri allievi sostengono di non averne bisogno, un altro ancora che non l'ha usata semplicemente perché non ce l'aveva. Può essere interessante il fatto che i 3 allievi che fanno uso della macchina calcolatrice appartengono alla stessa classe, segno forse del fatto che l'insegnante di quella classe non reprime il suo uso (o, almeno, non del tutto).

Passiamo ora all'esame del test bambini ed automobili.

Sono sottoposti al test: 25 allievi; di essi:

esegue l'operazione  $4 \times 6 = 24$  e dichiara che occorrono 24 automobili:

1

dichiarano che serve una sola automobile: 2

dichiarano che servono 2 automobili: 22.

Dei 22 allievi che rispondono che occorrono 2 automobili, solo 2 scrivono la risposta ed il commento tutto e solo a parole; gli altri 20 sentono la necessità di eseguire operazioni aritmetiche (si tratta certo della clausola e.g.f., *esigenza della giustificazione formale*, descritta in [D'Amore, Sandri, 1997]). Le operazioni sono: soprattutto  $6 - 4 = 2$  e qualche  $6 : 2 = 3$ . La prima viene spiegata da molti allievi in modo

---

<sup>9</sup> I 3 allievi che fanno uso della calcolatrice danno la risposta 31 in 2 ed 1 è quello che dà la risposta 31,333333.

euristico: dei 6 bambini, 4 vanno in un'automobile; i 2 che *restano* vanno in un'altra automobile (c'è anche 1 allievo che chiede di poter usare un camioncino, in luogo di un'altra automobile). La seconda operazione ha senso, ben descritto in più protocolli: dividiamo i 6 bambini in 2 automobili, 3 per ciascuna; dunque si usa già il 2 come dato a divisore, ottenuto per via intuitiva. Abbiamo anche qualche  $6:4$ , ma mai appare esplicitamente un risultato del tipo 1,5; è probabile che alcuni allievi si diano la risposta "una e mezzo" ma poi non la esternino; qualche commento sembra provare un atteggiamento simile. Uno di questi è quello di Serena: «Servono due automobili (Non si possono usare un'automobile e mezzo)», segno di un'avvenuta operazione di divisione.

Ci sono poi una marea di commenti del tipo: «per stare più comodi», «per stare più larghi», e svariati altri.

In quasi tutti i protocolli appaiono controlli e commenti di tipo esclusivamente euristico che dimostrano in modo evidentissimo che i risolutori si sono fatti immagini della situazione molto realistiche; il fatto che le automobili siano guidate da papà o altri parenti, che si discuta sulla comodità ed altro, mostra che si tratta di scene evocate, vissute o potenzialmente tali.

In questo senso, molto illuminanti sono state le interviste.

Come abbiamo già detto, abbiamo intervistato in totale 12 allievi, 6 che avevano già eseguito per iscritto il test di Schoenfeld e 6 che avevano già eseguito il test bambini e automobili.

Mettiamo in evidenza alcuni risultati.

Il test bambini ed automobili non è considerato un vero problema e dunque mette fortemente in imbarazzo perché: «Non si sa che cosa fare, mentre qui [nel test di Schoenfeld] si fa la divisione»; questa posizione è condivisa anche da Daniela: «È strano; quello dei bus è più facile, lo riesci a capire meglio». Il problema di Schoenfeld dunque rientra nelle attese usuali, ben inserito nel modello generale di problema; segno evidente del fatto che nel test bambini ed automobili non sembra necessario eseguire una operazione aritmetica, perché il risultato «si vede», «si fa a mente»; se e quando l'operazione si scrive, è perché scatta la clausola e.g.f.

Ai 6 allievi che avevano risolto il secondo test è stata consegnata la macchina calcolatrice per aiutarsi a risolvere il test di Schoenfeld;

di questi 6 allievi:

1 fa la sottrazione  $1128-36$ <sup>10</sup>

1 fa l'addizione  $1128+36$ ;

1 [Matteo] confonde il segno che separa 31 da 333333, leggendo il risultato «trentuno milioni trec» e lì si blocca;

3 rispondono che occorrono 31 bus.

Ai 6 allievi che avevano risolto il test di Schoenfeld senza calcolatrice dando come risposta 31, è stato chiesto di rifare il calcolo, ma fornendo loro la calcolatrice; dopo aver eseguito i calcoli, nessuno di essi cambia idea sul risultato, confermando quello già scritto sul foglio.

Per concludere, una nota sulla reale comprensione che hanno i bambini di quel che rappresentano le cifre dopo la virgola. Nella intervista a Matteo, egli, dopo qualche difficoltà, come abbiamo visto, si rende conto che la scrittura sul visore va letta: 31,333333. Dopo aver risposto 31 alla domanda nel test di Schoenfeld e dopo essersi reso conto che restano altri soldati senza trasporto, suggerisce che: «Magari, considerando tutti questi 3 insieme ... [cioè i 3 che appaiono dopo la virgola] si può ottenere alla fine un altro bus...».

### **3.2. II media.**

Le prove sono state condotte a Baricella (due classi) ed a Casalecchio (una classe) (entrambi i centri sono in provincia di Bologna)<sup>11</sup>; sono stati sottoposti alla prova 47 allievi, dei quali 23 sul test di Schoenfeld e 24 sul test bambini ed automobili<sup>12</sup>.

Dei primi 23, sono stati poi intervistati 8 allievi; dei secondi 24, sono stati intervistati 11 allievi.

---

<sup>10</sup> Questo studente aveva risolto il problema bambini ed automobili con la sottrazione  $6-4=2$  e dunque forse cerca un'analogia tra i due problemi.

<sup>11</sup> Ringraziamo le insegnanti: Giuliana Dalmonte, Maria Giuseppina Dondi, Paola Raimondo per aver messo a nostra disposizione le loro classi e le Presidenze per averci permesso di entrare nelle scuole in orario di lezione per effettuare le prove.

<sup>12</sup> Va qui detto che, per evitare che tale prova fosse snobbata perché considerata troppo banale, è stata messa come seconda sul foglio A4; il primo test, che noi non abbiamo affatto preso in esame nella nostra ricerca, era relativo ad un problema standard di proporzionalità diretta.

Dei 23 allievi sottoposti alla prova di Schoenfeld:

sbagliano la divisione o eseguono un'altra operazione: 5

dichiarano di non saperlo risolvere: 2 <sup>13</sup>

effettuano correttamente il calcolo: 16

di questi 16, usano la macchina calcolatrice: 8

di questi 8:

danno la risposta 31: 4

dà la risposta 31,3: 1

danno la risposta 31,3̄: 2

dà la risposta 32: 1;

degli 8 che non usano la macchina calcolatrice:

danno la risposta 31: 2

danno la risposta 31 circa: 2

dà la risposta 31,3: 1

dà la risposta 32: 1

“forzano” il risultato della divisione in modo da ottenere 32: 2 <sup>14</sup>.

Questo “forzare” il risultato algoritmico pur di ottenere il risultato voluto è, pur nella sua ingenuità, indice del fatto che l'allievo è consapevole di quel che deve avere come caratteristica il risultato, e cioè essere un numero intero. È per questo che ci sembra ragionevole inserire questi 2 casi nella tipologia di risposta: 32.

Abbiamo così 4 risposte 32 (dunque il 17%, contro il 23% di Schoenfeld ed il 36% ottenuto da noi in V elementare: una netta diminuzione<sup>15</sup>); di queste 4 risposte, 1 è ottenuta da un allievo che fa uso della macchina calcolatrice e 3 da allievi che non ne fanno uso. (I 2 allievi che “forzano” il risultato ovviamente fanno i calcoli a mano).

[A proposito della calcolatrice, è evidente che in queste tre classi le insegnanti non si oppongono in modo particolare al suo uso perché la sensazione di scandalo, vista nelle quinte elementari, non c'è. Va anche detto però che tutti gli studenti hanno accolto con favore, anche con entusiasmo, a volte, il nostro invito a far uso della calcolatrice. Forse la

---

<sup>13</sup> Confermiamo dunque la stessa percentuale di errori, il 30%, ottenuta nelle prove da Schoenfeld.

<sup>14</sup> In entrambi i casi appaiono calcoli ... localmente esatti, ma pieni di cancellature e sovrapposizioni, per ottenere 32 a forza.

<sup>15</sup> Se poi non avessimo inserito quelle due risposte “forzate” 32 tra esse, la percentuale delle risposte corrette scenderebbe all'8-9%!



evidente debolezza degli allievi ha suggerito alle insegnanti questa modalità di esecuzione dei calcoli, almeno in modo sporadico].

Passiamo ora all'esame del test bambini ed automobili.

Sono sottoposti al test: 24 allievi; di essi:

dichiara che servono 3 automobili: 1

dichiara che ne servono 1 e mezza: 1

esegue operazioni senza senso, usando dati non presenti nel testo: 1

dichiara che servono 1 automobile e mezza o due: 1

dichiarano che servono 2 automobili: 20.

Di questi ultimi 20 allievi, sono molti quelli che, conformemente a quanto era già successo in V elementare, si esprimono in termini di «stare più larghi» eccetera, ponendo 3 bambini in ciascuna auto, piuttosto che 4 nella prima e 2 nella seconda. Spariscono (o quasi) papà ed altri parenti alla guida e, sebbene la clausola e.g.f. sia meno presente, tuttavia parecchi eseguono operazioni, le stesse già viste in V elementare (soprattutto  $6-4=2$ , qualche  $6:2=3$ ).

Esaminiamo ora le interviste.

Come abbiamo già detto, abbiamo intervistato in totale 19 allievi, 8 che avevano eseguito la prova di Schoenfeld ed 11 che avevano eseguito il test bambini ed automobili.

Mettiamo in evidenza alcuni risultati.

Agli 8 allievi che avevano dapprima eseguito la prova di Schoenfeld, è stato sottoposto il test bambini ed automobili; *tutti* danno la risposta 2, senza fare calcoli; qualcuno, però, ha detto che sarebbe stato *giusto* fare la divisione. Solo Andrea trova *strano* il fatto che l'operazione dia 1,5 «mentre invece la risposta *deve* essere 2». Alla sollecitazione su che cosa avrebbe scritto se avesse avuto quel problema, risponde: «Avrei scritto 1,5 automobili».

Agli 11 allievi che avevano dapprima eseguito il test bambini ed automobili, è stato sottoposto il test di Schoenfeld. Vediamo i singoli casi:

Salvatore tenta di addizionare 36 più volte a sé stesso per tentare di arrivare a 1128, usando la calcolatrice, ma naturalmente dopo un po' desiste; l'intervistatore gli suggerisce di tentare un'altra strada; egli

esegue allora la divisione, ma ottiene, chissà come, 43,333333 e risponde «43»;

Elena usa la calcolatrice ed ottiene 31,333333; dapprima risponde «31,33» poi «circa 32», ma senza alcun riferimento alla realtà dei bus che nel frattempo sembra aver completamente dimenticato;

Nicoletta esegue la sottrazione:  $1128-36$  ed esprime il risultato in termini di «numero di bus necessari»;

Elia, che aveva risposto «una automobile e mezza» nel test bambini ed automobili, tenta di eseguire nel test di Schoenfeld 36:1128, senza grande successo, neppure con la calcolatrice;

Luca, dopo aver eseguito la divisione  $1128:36$  con la calcolatrice, risponde che avrebbe scritto  $31,\bar{3}$  o forse «solo 31» (ma poi aggiunge: «Rimane qualche soldato, ma pazienza»);

Pompilio ed Alice rispondono  $31,\bar{3}$ , dopo aver fatto i calcoli con la calcolatrice;

Matteo dapprima risponde anche lui  $31,\bar{3}$ , ma poi dice che «forse» avrebbe scritto «quasi 32»;

Fabio, Michela e Gianluigi optano per la risposta: 31.

A *tutti* gli intervistati è stato chiesto come avessero fatto a risolvere il test bambini ed automobili e *tutti* hanno ammesso di *non aver avuto bisogno* di fare una operazione, con motivazioni del tutto identiche a quelle già viste in V elementare.

A tutti è poi stato chiesto quale fosse la differenza tra i due test. Le risposte sono state di due tipi, fondamentalmente:

- di analogia o differenza *aritmetica*:
  - di analogia: in tutti e due ci vuole la divisione;
  - di differenza: nel primo ci vuole la divisione, nel secondo la sottrazione
- di differenza *contestuale*: nel primo ci sono soldati e bus, nel secondo bambini ed automobili.

Quest'ultimo fatto è già stato segnalato ampiamente in [D'Amore, 1993] ed ivi discusso.

### 3.3. Il liceo classico.

Le prove sono state condotte a Mantova, presso due classi del liceo classico sperimentale<sup>16</sup>; sono stati sottoposti alla prova 36 allievi, ma con modalità diverse dalle precedenti. A tutti venivano consegnati 2 fogli A4. Nel primo era riportato il test di Schoenfeld, con la solita domanda sull'uso della macchina calcolatrice. Nel secondo si chiedeva all'allievo di spiegare come avesse fatto a risolvere il test di Schoenfeld; si dava poi il test bambini ed automobili e si chiedeva se i due problemi si potessero risolvere nello stesso modo. Non erano poi eseguite interviste.

Dei 36 allievi sottoposti a test c'è il caso di un'allieva che ottiene un risultato e ne dichiara un altro; scartiamo questa prova. Restano dunque 35 prove valide.

Sbagliano i calcoli: nessuno; risultato nettamente diverso da quello di Schoenfeld, nonostante si tratti di allievi della stessa età. Va detto che la nostra prova è stata fatta in una scuola di livello elevato ed in particolare in due classi considerate di buon livello.

Usano la macchina calcolatrice 13 allievi; essi danno le seguenti risposte:

31: 3

circa 31: 2

$31,\bar{3} \cong 32 : 2$  <sup>17</sup>

circa 32: 1

32: 5.

Dunque, il 38% di chi usa la calcolatrice dà la risposta 32 con piena consapevolezza.

Non usano la macchina calcolatrice 20 allievi; essi danno le seguenti risposte:

31: 2

$31,\bar{3} : 2$

circa 32: 2

$31,\bar{3}$  cioè 32: 1

---

<sup>16</sup> Ringraziamo il prof. Claudio Passilongo per averci permesso di condurre l'esperienza.

<sup>17</sup> Il segno  $\cong$ , piuttosto diffuso nelle due classi, viene interpretato come "circa"; dunque 32 è l'approssimazione di  $31,\bar{3}$ .

$$31,\bar{3} \cong 32 : 1$$

31 bus più una “gip” (sic!) o una macchina: 2

32: 10.

Si noti che la risposta 32 è data da 14 allievi su 20 che non usano la macchina calcolatrice (70%); e da 5 su 13 allievi che usano la macchina calcolatrice (38%); come se l’uso della macchina, potenziando l’influsso della clausola di delega formale, inibisse in qualche modo il riesame critico della congruenza tra risultato ottenuto e domanda del problema in termini di aderenza alla realtà.

Nulla dicono circa l’uso della macchina calcolatrice 2 allievi: di essi, uno dà la risposta 31 e l’altro la risposta 32.

In totale, dunque, coloro che con piena consapevolezza danno la risposta 32 sembrano essere: 19 su 35, cioè il 54%<sup>18</sup>.

L’esame del test successivo porta alle seguenti osservazioni: molti dichiarano di poter risolvere il test bambini e automobili senza fare calcoli. Vediamo qualche dichiarazione esplicita in proposito:

Ambra: «Il procedimento non necessita di calcoli»;

Irena: «No, non lo risolverei nello stesso modo. Senza fare calcoli capisco che una macchina non basta, quindi ce ne vorranno 2»;

Elisa: «No, perché già dal testo posso capire il risultato del problema».

E così via.

Gli allievi che invece fanno i calcoli si dividono nelle seguenti due categorie: c’è chi esegue  $6-4=2$  e chi  $6:4=1,5$ . Chi esegue quest’ultima operazione, spesso conclude con la solita scrittura  $1,5 \cong 2$ . [Non ci sono più allievi che eseguono la divisione:  $6:2=3$ ].

Vi sono diversi formalismi “a vuoto”: per esempio  $6_b-4_b=2_b$ ; segni logici del tipo  $\Rightarrow$ ; errate operazioni (forse a causa della fretta:  $4:6$ , per esempio); una sola risposta 1,5; ed una sola del tipo: circa 2.

Nonostante l’età più matura, a sorpresa sono moltissime le osservazioni ingenuie di stampo realistico, ancora legate allo stare comodi, larghi e così via; allo spreco inutile di automobili: se i bambini fossero piccoli, potrebbero stare tutti dentro una sola auto; oppure se ne potrebbe approfittare per trasportarne 8 invece che solo 6; eccetera.

---

<sup>18</sup> Questo risultato è molto superiore al 23% di Schoenfeld: ma va ancora ribadito che la sua prova avveniva in scuole secondarie di ogni livello e noi l’abbiamo fatta solo in un caso molto particolare.

A mo' di conclusione, ed in attesa di fare considerazioni generali sui risultati in **4.**, riassumiamo i dati percentuali di risposte esatte nella seguente tabella.

|                   | <b>test di Schoenfeld</b> |                  | <b>test b. e a.</b> |
|-------------------|---------------------------|------------------|---------------------|
|                   | senza calcolatrice        | con calcolatrice |                     |
| V elementare      | 36%                       | 0%               | 88%                 |
| II media          | 37%                       | 12%              | 83%                 |
| II liceo classico | 70%                       | 38%              | 92%                 |

## **4. Considerazioni generali e conclusioni.**

Molte conclusioni sono già state anticipate in **3.**, durante la presentazione dei risultati. Tuttavia ci sembra utile ritornare sulle principali, in modo più esplicito.

### **4.1. La clausola «di delega formale».**

Non solo ci sembra confermata la evidente presenza di tale clausola; ma ci pare sia verificato il fatto che l'uso della macchina calcolatrice inibisce, per così dire, il controllo critico: l'affidamento alla calcolatrice del calcolo risolutivo sembra liberare il solutore dalla necessità di ogni tipo di controllo successivo tra risultato ottenuto e congruità semantica con la realtà evocata nel testo del problema.

La precedente tabella mostra che la percentuale di risposte esatte al test di Schoenfeld è nettamente minore in chi fa uso della calcolatrice (nella scuola elementare si passa da 36 a 0%; nella scuola media si passa da 37 a 12%; nella scuola superiore si passa da 70 a 38%) ed in costante

ascesa con l'età (si passa da 0% nella scuola elementare, a 12% nella scuola media, a 38% nella scuola superiore).

Le risposte  $31,\bar{3}$  e 31,333333, poi, appaiono (quasi) solo tra chi fa uso della macchina, segno evidente di tale inibizione.

#### **4.2. Modello generale di problema e di risoluzione dei problemi.**

La nostra prova rafforza molte delle convinzioni espresse in [Zan, 1991-92]. Ci è sembrato di notevole interesse quanto riportato in **3.** relativamente a bambini di V elementare dichiaratisi imbarazzati di fronte al test di bambini ed automobili perché non sapevano che operazione eseguire. Netta ed evidente appare anche la difficoltà di riesaminare il risultato rispetto alla congruenza non solo al testo, ma anche al mondo reale. Ci ritroviamo così a trovare conferme molto esplicite alla frase di Schoenfeld citata in **1.1.** ed a quella di Nesher citata in **1.2.**

Risulta anche confermato che il test bambini e automobili non richiede l'uso di operazioni; se gli studenti le eseguono, *non è per dare risposta al test*, ma per ottemperare alla clausola e.g.f del contratto didattico, secondo la quale nel dare una risoluzione ad un test di matematica si *devono* fare delle operazioni. Ma che questo produrre operazioni non sia atteggiamento spontaneo del risolutore è evidente, se si osserva quanto contrasti con la dichiarazione *esplicita* di moltissimi allievi secondo la quale non occorre fare operazioni nel caso del test bambini e automobili. Dunque, in un test con dati e situazione così semplice, non scatta la clausola di delega formale, la quale sembra coinvolgere test con dati numerici grandi.

Nel caso del test bambini e automobili, non si pongono problematiche legate al modello generale di problema, se non nel senso seguente. Nelle interviste a quei soggetti che avevano appena risolto il test di Schoenfeld, abbiamo proposto il test bambini e automobili. Essi, accettato per analogia che il secondo test *dovesse* essere legato al primo, allora deducevano che anch'esso *doveva* potersi risolvere con una operazione. In questo senso, però, il secondo, più del primo, produce imbarazzo, proprio perché entrano in conflitto le due credenze: da un lato, il *dover* fare una operazione; dall'altro, la sensazione di non averne bisogno dal momento che la soluzione è stata trovata di colpo, in modo

intuitivo, immaginando la scena, senza dover ragionare o eseguire calcoli.

#### **4.3. Modello mentale che il solutore si fa della situazione descritta nel testo.**

Come abbiamo già detto, è del tutto confermato il fatto che in qualche caso (ed in modo specifico nel caso del test bambini e automobili) il modello mentale coincide con ed offre immediatamente la soluzione, *d'emblée*. Il risolutore ha l'impressione di non avere di fronte un problema, perché la risposta è legata all'esperienza (reale o potenziale), a *script*, e non si passa attraverso alcun tipo di deleghe formali.

Ci sembra anche confermato il fatto che nel secondo test la scena sia vissuta come più vicina, più immediata, più semplice da immaginare. Lo dimostrano i tanti commenti, in *ogni* livello scolastico, sulla comodità dei posti, eccetera, molto diffusi; la distribuzione in auto desunta dall'immagine e non da operazioni; l'intervento di papà e parenti vari nello script; eccetera; fatto non registrato affatto nel test di Schoenfeld.

#### **4.4. Modelli intuitivi delle operazioni.**

È verificato che il test bambini e automobili si risolve ricorrendo a *script* dettati da esperienze vissute o potenzialmente tali, vicine all'esperienza quotidiana.

Ciò è confermato ulteriormente da altri due fatti, in qualche modo riconducibili anche ai modelli intuitivi delle operazioni:

1) l'operazione cui si fa ricorso per risolvere il secondo test è la *sottrazione*, in quanto si tratta di *sistemare* i 4 bambini nella prima auto e vedere quanti ne *restano* (in realtà, il solutore lo vede subito in modo intuitivo, ma spesso vuole a tutti i costi produrre una risposta formale: in queste condizioni, la sottrazione, in uno dei suoi modelli intuitivi, risponde bene alle richieste);

2) il secondo fatto che conferma quanto sopra è che la divisione  $6:2=3$ , pure più volte utilizzata come operazione risolutiva, sfrutta *già* a divisore quel 2, cioè il numero di automobili nelle quali ripartire i 6 bambini, che era il numero richiesto e *non* un dato. D'altra parte, ciò risponde ad un modello intuitivo forte della divisione.

#### **4.5. L'uso della lingua naturale.**

Sull'uso della lingua naturale, a commento o giustificazione delle risposte (per esempio in termini di «più largo», «più comodo», eccetera), abbiamo già detto.

Sul contesto creato in ambiente risolutivo dalla lingua naturale, come già preannunciato al termine di **2.5.**, dovremo tornare a lungo in modo specifico, dando il resoconto di una nostra ricerca espressamente condotta su questo punto, già in corso da tempo.

#### **Riferimenti bibliografici.**

Boero P. (1986), *Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 9 (9), 48-93.

Boero P., Ferrari P. L. (1988) *Rassegna di alcune ricerche sul «problema dei problemi»: loro importanza per l'insegnamento*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 7-8 (11), 659-684.

Carpenter T. P., Lindquist M. M., Matthews W., Silver E.A. (1983), *Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary School*, «Mathematics Teacher», 79 (9), 652-659.

Cassani A., D'Amore B., Deleonardi C., Girotti G. (1996), *Problemi di routine e situazioni "insolite". Il "caso" del volume della piramide*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 19B, 3, 249-259.

Castro C., Locatello S., Meloni G. (1996), *Il problema della gita. Uso dei dati impliciti nei problemi di matematica*, «La matematica e la sua didattica», 2, 166-184.



D'Amore B. (1993), *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*, Angeli, Milano.

D'Amore B. (1994), *Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico*, in: Jannamorelli B. (ed.), *Insegnamento/Apprendimento della matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*, Atti del I Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona marzo 1993, Qualevita, Sulmona. Anche in: «La matematica e la sua didattica», 3, 1993, 289-301. Una versione più ampia in lingua tedesca in: «Journal für Mathematik Didaktik», 17, 2, 1996, 81-97.

D'Amore B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, «La matematica e la sua didattica», 3, 322-335; [prolusione al TGXIV nell'ambito di ICME 8, Siviglia 1996].

D'Amore B., Frabboni F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore B. (1997), *Matite-Orettol-Przetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione?*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», in corso di stampa.

D'Amore B., Sandri P. (1997), *Les réponses des élèves aux problèmes de type scolaire standard à une donnée manquante*, sotto referee per la stampa.

D'Amore B., Zan R. (1996), *Italian Research on Problem Solving 1988-1995*, in: Malara N., Menghini M., Reggiani M. (eds.), *Italian Research in Mathematics Education: 1988-1995*, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Quaderni CNR.

Ristampato in: Gagatsis A., Rogers L. (eds.) (1996), *Didactics and history of mathematics*, Thessaloniki, 35-52. Ristampato in una versione più ampia in italiano in: «La matematica e la sua didattica», 3, 1996, 300-321.

Deri M., Sainati Nello M., Sciolis Marino M. (1983), *Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 6 (6), 6-27.

Fischbein E. (1985), *Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari*, in: Chini Artusi L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli, Bologna, 122-132.

Fischbein E. (1992), *Intuizione e dimostrazione*, in Fischbein E., Vergnaud G., *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, a cura di D'Amore B., Pitagora, Bologna, 1-24.

Kilpatrick J. (1987), *Where do good problems come from?*, in: Schoenfeld A. H. (ed.) (1987), citato.

Laborde C. (1982), *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse, Univ. J.Fourier, Grenoble.

Laborde C. (1995), *Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica?*, in: Jannamorelli B. (ed.), *Lingue e linguaggi nella pratica didattica*, Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona marzo-aprile 1995, Qualevita, Sulmona.  
Ristampato in: «La matematica e la sua didattica», 2, 1995, 121-135.

Maier H. (1993), *Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves*, «Caers de didactiques des mathématiques», 3, 86-118.  
Trad. it. in: «La matematica e la sua didattica», 3, 1995, 298-305.

Nesher P. (1980), *The stereotyped nature of word problems*, «For the learning of mathematics», 1, 1, 41-48.

Shama G., Movshovitz Hadar N. (1994), *Is infinity a whole number?*, Atti del XVIII PME, Lisboa, 265-272.

Pellerey M. (1984), *Procedimenti matematici e immagini mentali*, «Orientamenti pedagogici», 3, 444-465.

Pellerey M. (1990), *Controllo ed autocontrollo nell'apprendimento scolastico*, «Orientamenti pedagogici», 3, 473-491.

Schoenfeld A. H. (1985), *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, New York.

Schoenfeld A. H. (1987), *What's All the Fuss About Metacognition?*, in: Schoenfeld A. H. (ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Ass., Hillsdale (N.J.), 189-215.

Schubauer Leoni M. L., Ntamakiliro L. (1994), *La construction de réponses à des problèmes impossibles*, «Revue des sciences de l'éducation», XX, I, 87-113.

Zan R. (1991, 1992), *I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 14 (7,9), 659-677, 807-840; 15 (1), 39-53.