Problemi di routine e situazioni “insolite”. Il “caso” del volume della piramide

Cassani, D’Amore, Deleonardi, Girotti, 1996

300. Cassani A., Deleonardi C., D’Amore B., Girotti G. (1996). Problemi di routine e situazioni “insolite”. Il “caso” del volume della piramide. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19B, 3, 249-260. [Questo articolo è stato ripubblicato in lingua inglese in: Gagatsis A., Rogers L. (eds) (1996). *Didactics and History of Mathematics*. Erasmus ICP 95 G 2011/11. Thessaloniki. 73-82. Questo articolo è stato ripubblicato in lingua spagnola: *Números*. 38, 1999, 21-31].

1. Il problema

Sono da considerarsi problemi di routine, almeno nelle scuole italiane, normalmente in III media (età degli allievi: 13-14 anni), specie alla fine del mese di maggio, esercizi nei quali si deve calcolare il volume di una piramide (retta, a base quadrata), quando siano date le misure del lato di base e dello spigolo laterale. Lo studente applica un procedimento ben acquisito, facendo uso due volte del teorema di Pitagora. Tale esercizio è talmente diffuso che sembra ragionevole ipotizzare un’alta percentuale di studenti in grado di risolverlo correttamente.
Qual è l’atteggiamento assunto dallo studente di fronte a una situazione decisamente insolita, nella quale viene fornita una piramide reale, con l’invito a misurare il volume di *quella particolare piramide concreta*?
Ci sarà da parte dello studente un prevalente atteggiamento di tentare di ricondurre le proprie acquisizioni formali al problema relativo all’oggetto concreto, o invece si avvertirà un contrasto tra l’applicazione di una formula in condizioni di routine ed in questa situazione, per lui insolita?
Che differenze di risposte si hanno, se il problema con la piramide concreta è proposto subito dopo la risoluzione di un problema formale, oppure è proposto senza alcun esplicito richiamo a quello?
Che differenze di risposta si hanno se si dà solo la piramide con la richiesta di misurarne il volume, oppure si danno insieme la piramide ed un righello? La presenza esplicita di questo strumento spinge a misurare qualcosa? Che cosa? Spinge a replicare la situazione formale di routine?

2. Ipotesi della ricerca

Ipotesi 1. Abbiamo già in **1.** ipotizzato che gli studenti di III media in maggio sappiano in larga percentuale risolvere l’esercizio di routine; ma questa ipotesi va verificata.
Se questa prima ipotesi è confermata, diventano interessanti le seguenti:
Ipotesi 2. Ci sarà un forte abbassamento percentuale di ragazzi in grado di risolvere il problema concreto, e quelli che lo faranno non è detto che tenderanno a rimettersi nella situazione descritta dal problema di routine. Inoltre: se il problema con la piramide concreta è proposto subito dopo la risoluzione del problema formale, sarà probabilmente maggiore la percentuale di ragazzi che tenderanno a replicare la stessa strategia.
Ipotesi 3. Sembrava plausibile pensare che la messa in contatto con la piramide reale avrebbe potuto far pensare a sistemi di valutazione del volume che non richiedessero l’uso di misure di spigoli (per esempio: l’immersione in un cilindro graduato pieno d’acqua); mentre la consegna esplicita di un righello avrebbe spinto a ricondurre il problema sulla piramide reale a quelli formali di routine.

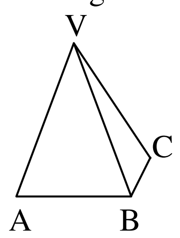
3. Metodologia

La ricerca ha comportato prove che si sono protratte per 3 anni (1992, 1993 e 1994) in classi III media di Bologna e vari paesi dei dintorni, coinvolgendo in totale oltre 200 allievi. Abbiamo sempre operato con gli allievi nell’ultima settimana di maggio, momento nel quale, su suggerimento di vari insegnanti della scuola media, l'esercizio da noi proposto è realmente (o dovrebbe essere) considerato di routine.

L'esercizio scelto è il seguente:

È data una piramide retta a base quadrangolare regolare con vertice V e base ABCD.

$\overline{AB} = 10$ cm
$\overline{AV} = 20$ cm



Calcola il volume di questa piramide.

Questo testo è stato scritto su foglio formato A4, fotocopiato e consegnato agli allievi destinati al test della risoluzione della prova scritta.

- Nel 1992 abbiamo solo eseguito il test scritto per verificare l'Ipotesi 1, coinvolgendo 87 allievi. [In realtà, nel 1992 si sono anche fatte interviste, ma al solo scopo di conoscere le reazioni degli studenti, capirne gli atteggiamenti, verificarne la disponibilità; i risultati di tali prove propedeutiche ci sono stati utili *solo* per organizzare le interviste del '93 e '94].
- Nel 1993 abbiamo coinvolto 93 allievi. Di essi, 78 hanno svolto il test scritto e 15 no: essi sono stati solo intervistati; dei 78 allievi che hanno svolto il test scritto, 10 sono stati successivamente intervistati. I risultati del test scritto dei 78 allievi sono serviti a verificare i risultati della prova del 1992. Le 25 interviste servivano invece a verificare la Ipotesi 2. I 25 ragazzi solo intervistati appartenevano a 5 classi diverse (5 per classe); essi vennero scelti in modo del tutto casuale ed intervistati uno alla volta, da 3 di noi; in realtà, a turno, uno dei 3 effettuava l'intervista mentre gli altri 2 prendevano appunti sul comportamento e le risposte dell'intervistato. Le 25 interviste sono state effettuate in 3 mattine di una stessa settimana ed i dati sono stati analizzati all'inizio della settimana successiva, paragonando gli appunti presi. Distribuendo in modo casuale la scelta dei 25 intervistati, a 15 vennero in realtà consegnate 2 piramidi: una di legno piena ed una di tondini di metallo saldati (dunque uno "scheletrato"), mentre a 10 venne data solo la piena (e solo successivamente veniva mostrato lo scheletrato). A tutti e 25 gli intervistati veniva dato insieme alle 2 piramidi [o alla sola piramide piena], un righello, con la consegna di misurare il volume di una delle 2 piramidi a sua scelta [o della piramide piena]. A disposizione degli studenti, sul tavolo, c'erano sempre fogli bianchi ed una penna. I 15 intervistati che non hanno svolto il compito non conoscevano il contenuto del test scritto; i 10 intervistati che hanno svolto il compito, erano intervistati subito dopo aver svolto il compito scritto.
- Nel 1994 abbiamo condotto solo interviste per verificare l'Ipotesi 3; abbiamo intervistato 15 ragazzi di terza media, sempre nell'ultima settimana di maggio. Essi appartenevano a 3 classi diverse (5 per classe) ed erano scelti in modo del tutto casuale. A 5 di essi veniva fornita la sola piramide piena, a 5 la sola piramide scheletrata, a 5 entrambe. Null'altro era fornito in modo esplicito. La consegna era la stessa: «Trova il volume di questa piramide» (nel caso di una sola), oppure: «di una di queste piramidi, a tua scelta» (nel caso di 2 piramidi).

4. Risultati

Ricordiamo che nel 1992 abbiamo solo eseguito il test scritto per verificare che davvero una larga percentuale di allievi sapesse risolvere il problema di routine. Abbiamo eseguito la prova su 87 allievi, con i seguenti risultati:

- prova perfettamente corretta: 53
- prova sostanzialmente corretta (cioè con soli errori di calcolo o di arrotondamento): 20
- prova non terminata o confusa ma dalla quale traspare che l'allievo sa quel che deve fare da un punto di vista geometrico: 6
- prove con calcoli incomprensibili apparentemente senza legame con l'esercizio proposto o con errori di geometria tali da pregiudicare la comprensione della strategia da seguire nella risoluzione del compito: 8.

In definitiva, sembra lecito dichiarare che il 91% degli studenti sa esattamente che strategia adottare di fronte al problema di routine proposto, e lo fa.
[Nel 1993, la stessa prova è stata riproposta nuovamente a 78 allievi (sempre di III media, sempre nell'ultima settimana di maggio). Questa volta la percentuale delle risposte positive è stata più bassa (77%) di quella dell'anno precedente; ci siamo dati la seguente spiegazione: la prova del 1992 era stata fatta a Bologna città, mentre quella del 1993 aveva incluso scuole di campagna e collina].
Per quanto riguarda la Ipotesi 2, vediamo i risultati ottenuti con i 25 allievi intervistati nel 1993:

- 2 di essi misurano lo spigolo di base e l'altezza della piramide piena, appoggiando il righello sullo stesso piano (del tavolo) sul quale è poggiata la piramide e tenendolo perpendicolare, tracciando un'immaginaria retta parallela al piano (di base), dal vertice della piramide al righello; di questi, 1 aveva a disposizione la sola piramide piena ed 1 entrambe le piramidi; 1 aveva già risolto il problema di routine in precedenza e l'altro no (i due casi, Stefano e Alessandra, sono presentati più in dettaglio in **7.**);
- 23 allievi (molti dei quali dopo varie insistenze e sollecitazioni da parte dell'intervistatore) fanno uso del righello per misurare (tutti) lo spigolo di base ed inoltre misurano:
  - 6 lo spigolo laterale; di essi, uno lo usa per ricondursi al caso del problema di routine in modo dichiarato esplicitamente, e 5 si arrestano; di questi 5, però, 3 dichiarano che ora si potrebbe procedere trovando l'area di base (spigolo di base al quadrato) e moltiplicando per l'*altezza* appena misurata (che è invece, in realtà, lo spigolo laterale)
  - 17 misurano l'apotema, accostando il righello ad una faccia della piramide (indipendentemente che essa sia piena o scheletrata); di essi:
    - 9 procedono applicando il teorema di Pitagora una sola volta alle misure di metà lato di base ed apotema appena misurata (dunque si riconducono ad un procedimento di routine conosciuto, che non è quello da noi proposto nel test)
    - 8 procedono come se l'apotema trovata fosse l'altezza [e quindi propongono la formula: area di base per altezza (che è invece l'apotema) diviso 3] (in realtà, di questi 8, solo 3 scrivono su carta un procedimento sensato).

Il comportamento degli studenti è comunque molto vario e dunque in **7.** dovremo presentare in modo più dettagliato altri casi che si sono presentati.
Per quanto riguarda lo studio dell'Ipotesi 3, vediamo i risultati che si sono ottenuti con i ragazzi intervistati nel 1994.
Di questi 15 allievi, *nessuno* ha proposto strategie di valutazione del volume della piramide che non fossero quella di misurare qualche spigolo; in particolare, dunque, *nessuno* ha pensato di immergere la piramide in un cilindro graduato pieno d'acqua o cose simili, neppure di fronte alla piramide piena.
Anche la richiesta del righello come strumento per misurare qualche cosa onde poter valutare il volume appare spontaneamente solo in 5 casi su 15; in 9 casi su 15 il righello è accettato dopo una proposta esplicita fatta dall'intervistatore, di fronte all'imbarazzo; in un caso lo strumento è rifiutato come inutile, anche dopo la proposta dell'intervistatore.
Riassumiamo la distinzione dei 40 intervistati (1993 e 1994) sotto un'altra angolatura che sarà utile in **5.**; dei 40 allievi che hanno affrontato la risoluzione del problema concreto:

- 10 ricevono la piramide (o le piramidi) insieme al righello, dopo esser stati sottoposti al test scritto [caso A]
- 15 ricevono la piramide (o le piramidi) insieme al righello, senza esser stati sottoposti al test scritto [caso B]
- 15 ricevono solo la piramide (o le piramidi) senza righello e senza esser stati sottoposti al test scritto [caso C].

5. Discussione dei risultati

Relativamente all'Ipotesi 1, i risultati confermano pienamente l'attesa. Ciò rende interessante la discussione inerente l'Ipotesi 2.
L'Ipotesi 2 è confermata. Dei 10 allievi intervistati che erano già stati sottoposti al test [caso A], uno solo replica il nostro problema di routine. Non è affatto detto, dunque, che l'aver prima risolto il test spinga a replicare la stessa strategia, di fronte al problema concreto. Se si tiene conto del fatto che l'intervista veniva effettuata pochi minuti dopo lo svolgimento della prova scritta, ciò sembra dimostrare che per molti allievi non c'è collegamento alcuno tra la prova formale "di routine" e la situazione concreta "insolita".
Inoltre è confermato che vi sia un forte abbassamento di percentuale di allievi in grado di risolvere il problema concreto: lo fanno solo 10 allievi su 25 (il 40%), uno replicando e 9 usando un'altra strategia (quella che sfrutta spigolo di base ed apotema, e dunque una sola volta il Teorema di Pitagora). Da notare che questi 9 appartengono ai due casi, A e B indifferentemente.
Confermiamo che non appare affatto rilevante percentualmente la scelta di riutilizzare il procedimento del test, anche qualora lo si fosse appena visto in precedenza. Tuttavia, va detto che 6 dei 10 allievi del caso A usano il foglio e la penna prima tentando quanto meno di ri-fare, ispirandosi alla piramide concreta, un disegno come quello del test scritto, anche se con molta difficoltà (uno di essi chiede di poter «controllare il compito»).
Si deve anche notare come la scelta relativa all'uso di piramide piena o vuota, di fatto NON modifica le risposte dei ragazzi, almeno per quanto concerne l'Ipotesi 2. Notiamo che dei 15 allievi ai quali è stata data facoltà di scegliere tra la piramide piena e lo scheletrato, 11 scelgono la piena e 4 la vuota (ma chiacchiere informali con gli allievi ci spingono a supporre questa scelta soprattutto legata ad un fatto estetico: la piramide di legno è ben fatta, elegante, mentre quella scheletrata ha la punta leggermente smussata). [La scelta della piena, sembra contrastare con un fenomeno osservato solo di passaggio: dei 78 allievi sottoposti a test scritto nel 1993, 68 disegnano gli spigoli non visibili nel disegno da noi proposto (vedi **3.**)].
Quanto all'Ipotesi 3, ripetiamo che dei 15 ragazzi sottoposti alla prova nessuno ha proposto metodologie di valutazione del volume diverse da quelle della misura di spigoli. Dunque la nostra Ipotesi 3 è stata totalmente smentita.

6. Due osservazioni

Prima osservazione. Ben 8 dei 25 ragazzi sottoposti alla prima intervista dimostrano un vero e proprio timore, quanto meno un forte imbarazzo, di fronte all'invito ad entrare in contatto con la piramide reale (o una delle due); solo dopo molte insistenze accettano di toccare l'oggetto (o gli oggetti). Ciò mostra forse che la routine matematica, legata esclusivamente a fatti formali, ha reso non abituale il contatto con gli oggetti, in àmbito matematico; il contatto con gli oggetti è inatteso e dunque è fonte di fastidio.
Seconda osservazione. Ben 5 ragazzi dei 25 sottoposti alla prima intervista non riescono a mettere in relazione tra loro l'oggetto piramide ed il righello ed insistono ripetutamente nel chiedere agli intervistatori "i dati"; anche dopo il nostro esplicito invito a cercarseli da soli, non mostrano di capire come usare il righello a tale scopo.

7. Alcuni casi particolari

Esaminiamo ora alcuni casi particolari.
Stefano accetta solo dopo (molta) insistenza da parte nostra che si può misurare l'altezza della piramide con il righello; alla fine lo fa, giustificando verbalmente questo fatto con l'asserzione: «L'altezza della piramide coincide con quella del prisma che la contiene».
Ci si può chiedere se questa frase sia legata ad un buon modello mentale o se si tratti semplicemente di una ripetizione acritica di quel che l'insegnante deve aver detto, spiegando che relazione c'è tra volume di piramide e prisma di ugual base ed ugual altezza; la successiva intervista di Stefano dimostra che la sua frase è legata al primo caso: un buon modello mentale. Alla luce di ciò, insistiamo chiedendogli se non esista un metodo per calcolare il volume della piramide in modo diretto, cioè senza passare attraverso il prisma. Stefano replica che il «metodo classico» consiste nel misurare l'altezza con il righello; la difficoltà di ottenere questa risposta sembra legata alle attività di routine troppo formali; e comunque, Stefano è uno dei 2 soli allievi dai quali si ottiene l'ammissione di tale possibilità, e con fatica, dopo molte insistenze.
Alessandra è l'altro dei 2 studenti che misurano l'altezza della piramide con il righello: sceglie la piramide scheletrata e poi pone il righello verticalmente al centro del quadrato di base. La nostra insistenza nello spingerla a questa scelta non è tanto pressante, per cui si può ritenere che la sua sia una scelta spontanea. Ciò è in nettissimo contrasto con gli atteggiamenti di tutti gli altri: in molti casi, al termine delle interviste, abbiamo informalmente provato a proporre ad alcuni studenti la soluzione di Alessandra, ottenendo la non accettazione di tale strategia, ritenuta dai più impossibile, inaccettabile, scorretta, ...
Michela ha una strategia interessante: di fronte alla piramide scheletrata, ne misura l'apotema, poi toglie 2 cm da tale misura, ed usa la differenza così ottenuta come misura dell'altezza della piramide. Al nostro invito di misurare direttamente l'altezza per vedere se la misura trovata in quel modo è corretta, afferma che: «Non si può fare».
Di fatto, sembra che l'essere di fronte alle piramidi piena o scheletrata non produca grandi differenze, anche se, in taluni casi, sembra agli studenti più lecito misurare l'altezza nel caso dello scheletrato che non della piena. Tutti gli allievi, tranne uno, rifiutano di misurare in qualche modo l'altezza della piramide piena direttamente. In 2 soli casi (Giulia ed Alex) si assiste ad un ripensamento: dopo aver sostenuto che non si può misurare l'altezza della piena, ammettono che lo si possa fare nello scheletrato; dopo nostra spinta, modificano il loro convincimento, accettando che si possa misurare anche l'altezza della piramide piena, pur ammettendo di non sapere come fare. Negli altri casi, gli allievi dichiarano espressamente che l'altezza dello scheletrato si può misurare, ma l'altezza della piramide piena no.

8. Risposte alle domande poste in 1.

È indubbio che l'uscita da situazioni di routine per entrare in situazioni "insolite", lontano da clausole acquisite del contratto didattico, metta lo studente in un atteggiamento ostile, o di disagio, o di incertezza.
Inoltre, per quanto acquisito, un procedimento di routine sembra slegato dalla pratica, visto che pochissimi studenti mostrano di saper collegare il problema concreto all'esercizio usuale, anche se quest'ultimo è stato precedentemente ben risolto; quasi come se esso fosse fine a sé stesso, non trasferibile a contesti reali.
Né sembra esservi una consistente differenza a seconda che il problema concreto con la piramide sia proposto in collegamento ad un test scritto sullo stesso tema o no. L'imbarazzo provato nel caso reale sembra essere la connotazione più forte e più evidente.
La presentazione della piramide concreta *insieme* al righello dà risultati diversi dal caso in cui la piramide è presentata da sola *senza* righello. La presenza del righello spinge gli allievi a misurare

qualche spigolo (diffusissima e quasi spontanea la misura dello spigolo di base, come abbiamo visto). L'assenza del righello lascia per lo più attoniti gli studenti; solo la successiva sollecitazione da parte dell'intervistatore a chiedere qualche cosa per procedere spinge a chiedere un righello. Alcune testimonianze rivelano che la piramide reale è fuori dalle abitudini didattiche [Giada dichiara: «La piramide l'abbiamo trovata sul libro di geometria e poi abbiamo imparato le formule»]. Altre testimonianze mostrano che qualche studente crede comunque di doversi ricondurre sempre al caso *formale di routine* [Carmelo usa foglio e matita per disegnare una piramide, poi chiede il righello e misura l'altezza della piramide disegnata; ma poi in verità sembra esprimere il dubbio che quella altezza potrebbe non essere la stessa della piramide reale da noi proposta]. Forte è la presenza di allievi che, anche avendo in mano piramide e righello non sanno che farsene per risolvere il problema reale [Mohamed ipotizza che si debbano dare dati a caso]. Così come è presente la ricerca di artifici ("trucchi") [Enrico incastra le piramidi una dentro l'altra e dichiara che se si sapesse il volume dell'una si potrebbe trovare quello dell'altra]. Emergono poi in modo drammatico fraintendimenti mnemonici [Federica, pur di fronte alla piramide reale piena parla delle 2 basi della piramide; moltissimi altri fanno riferimento a formule non acquisite che solo vagamente ricordano quella del volume della piramide] cosa che non accade affatto nel test scritto di *routine*, come abbiamo visto.

9. Conclusioni

Perché questo così forte imbarazzo, da parte degli studenti? Vi sono almeno due cause diverse, a nostro avviso.

Mancanza d'abitudine. Alcune clausole del contratto didattico stabiliscono che a scuola si operi in modo ripetitivo. La nascita o la proposta di qualche cosa di nuovo è *sempre* accolta con fastidio o stupore [si vedano le celebri osservazioni di Wertheimer (1959) a questo proposito ed il paragrafo 13.3. in D'Amore (1993a)].

Chimera del calcolo esatto. L'eccesso di uso di cifre dopo la virgola nelle esercitazioni e la mancanza cronica nella scuola italiana di una sana attività di approssimazione, inducono la credenza (talvolta esplicitamente espressa) che in matematica si debba operare «in modo esatto» (qualsiasi cosa significhi questa frase). Misurare direttamente l'altezza, consapevoli del fatto che ciò produrrà misure non esatte ma solo approssimate, ripugna alla maggior parte dei ragazzi (anche se questo atteggiamento non è ammesso in modo consapevole ed esplicito). Sembrerebbe opportuno, al contrario, sviluppare una didattica esplicitamente tesa al raggiungimento della consapevolezza dei seguenti fatti: i problemi matematici traggono origine dalla realtà e sono dunque problemi che non rifuggono alla pratica; in ogni attività pratica le misure sono di necessità approssimate; fa parte della capacità individuale il saper approssimare in modo significativo ed intelligente (con ciò, l'idea di Matematica non si svilisce affatto, anzi ...). Per molti studenti, l'aggettivo "approssimato" sembra avere una connotazione negativa; si tratta evidentemente di semantica indotta, dato che è improbabile che il giudizio si sia formato da sé o in contrasto con le idee fornite dall'insegnante. Ci sembra che tale giudizio sia forse legato ad una immagine che taluni insegnanti di matematica hanno della disciplina.

Da un punto di vista didattico, ci pare di poter trarre alcune indicazioni. Ci sembra utile in generale uscire dalla routine non evitando di proporre problemi che escano dall'abituale, meglio se legati all'esperienza concreta. Il "caso del volume della piramide" qui esaminato non è che un esempio; ma già che su questo abbiamo lavorato, ci sembra utile proporre che non si faccia del tutto a meno di modelli concreti. Siamo del tutto d'accordo con Fisher (1978) e Fischbein (1993) sul pericolo che si corre nel trasformare tutta la geometria in modelli concreti. [Si vedano anche Mariotti (1989, 1991, 1992a,b)]. Ma da ciò a farne del tutto a meno, ci pare corra troppa differenza.