L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE
19A, n. 3, maggio 1996, pp. 223-246

Fa' finta di essere...

Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media.

299. D’Amore B., Sandri P. (1996). “Fa’ finta di essere...”. Indagine sull’uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19A, 3, 223-246. [Questo articolo è stato ristampato in lingua spagnola su: *Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática* (Bogotà, Colombia). 4, 3, 1999, 207-231].

Bruno D'Amore - Patrizia Sandri

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Riassunto. *Questo lavoro presenta i risultati di un'indagine eseguita nella scuola media sull'uso della lingua naturale in contesto matematico e sulla produzione di modelli esterni delle concezioni profonde degli allievi di alcuni concetti elementari*.

Summary. *This paper shows the results of an investigation holds in the secondary school (11-13 years) about the use of spoken language in a mathematical context and the production of external models of the student's deep ideas of somne elementary concepts*.

1. Il problema.

Fin dal suo esordio nella scuola elementare, lo studente viene più o meno esplicitamente educato a far uso, nelle ore di matematica, di un linguaggio che non è quello comune, ma una sua versione più "tecnica" [Maier, 1989].
Il linguaggio matematico che viene imposto allo studente sostanzialmente è quello che l'insegnante auspica per lui, sulla base di una propria "immagine della matematica", all'interno di un sistema linguistico che ha come fonti ispiratrici termini come "rigore", "coerenza", "metodo". Spesso l'insegnante ritiene che solo lo studente che è in grado di trasferire un significato dal linguaggio naturale a quello più pertinente (o, talvolta, viceversa) ha compreso il concetto matematico in oggetto. Ma lo studente, per capire e cercare di far uso del termine tecnico, lo rielabora, riallacciandolo a parole conosciute o ad esperienze e concetti posseduti (per esempio, il termine "angolo" utilizzato a scuola non ha lo stesso senso di quando è usato in contesto più familiare: più spesso in tal caso "angolo" va interpretato come "diedro formato da due pareti consecutive", o altro).
Spesso solo per imitazione dell'insegnante e dei libri di testo, e non per esplicito invito diretto, lo studente si adegua non solo a far uso di termini pertinenti alla matematica ma anche ad imitare costrutti semantici che insegnanti ed autori considerano più adatti alla costruzione della conoscenza matematica, di quanto non lo sia il linguaggio naturale. Ciò è già presente nella scuola elementare (6-11 anni), ma lo è assai di più nella scuola media (11-14 anni) [Laborde, 1982, 1995]. Ci occuperemo, d'ora in poi, solo di questo secondo livello scolastico.
L'allievo è spinto da una speciale clausola del contratto didattico[1] ad esibire un apparato formale il più possibile ricco di termini matematici ed operazioni, anche quando il problema proposto non lo richiederebbe.[2] Ciò comporta che la risposta ad una domanda dell'insegnante può rivelare assai poco sulle competenze reali dell'allievo, dato che quest'ultimo non solo deve concepire la risposta, ma la deve poi esprimere in un linguaggio che non è quello che usa spontaneamente in altri contesti (non scolastici e comunque non relativi alla matematica) [D'Amore, 1994]. Occorre anche aggiungere che non è affatto detto che l'uso di terminologia tecnica sia indice di una effettiva comprensione dei concetti ad essa relativi.[3]
L'insegnante che deve valutare la risposta, a quel punto, se è consapevole di questa doppia difficoltà, non sa più se attribuire un'eventuale incapacità ad

[1] Si tratta della clausola che abbiamo chiamato e.g.f., *esigenza della giustificazione formale*, studiata in [D'Amore, Sandri, 1995]. In sostanza si tratta della diffusa esigenza manifestata in vario modo dagli allievi di dare comunque o una soluzione formale (sebbene non richiesta) o di completare una risposta informale con una formale.
[2] Su questo punto è utile la lettura di [Boero, 1986] e [Zan, 1992].
[3] Valga per tutti l'esempio del cosiddetto "protocollo di Belluno" presentato in [D'Amore, 1994].

una ignoranza sull'oggetto matematico in questione (per esempio: definizione o regola o dimostrazione o risoluzione di un problema) o ad una consapevolezza di inadeguatezza del linguaggio: il ragazzo può anche "sentire" dentro di sé qual è la risposta che tenderebbe a dare spontaneamente, ma è anche consapevole che non può darla nel linguaggio naturale e non riesce a "tradurla" nel tipo di linguaggio che suppone essere quello atteso dall'insegnante. Va detto, naturalmente, che il fatto di "sentire" dentro di sé qual è la risposta giusta, intuendola, immaginandosi una situazione, non significa affatto saperla esprimere, neppure in lingua naturale...
Ingenuamente si potrebbe pensare che un insegnante consapevole di questo problema sia in grado di superare l'ostacolo semplicemente invitando l'allievo ad esprimersi "con le sue parole" (cioè nella lingua comune: e càpita spesso di sentire espliciti inviti di questo genere da parte di insegnanti); ma è evidente che, nonostante tale invito, lo studente non ritiene che ciò sia lecito e considera l'uso della lingua naturale non pertinente: dunque questo invito non sortisce alcun effetto positivo. L'ambiente scuola, l'ora di matematica, anni di condizionamento sembrano inibire questa possibilità.

Ci si può porre allora le seguenti domande:

D.1. È possibile aggirare l'ostacolo e far sì che lo studente si senta svincolato dall'obbligo a far uso del linguaggio che crede obbligatorio, spingendolo ad usare la lingua naturale? Se ciò è possibile, in che modo, restando nell'ambiente classe?

D.2. Permarranno resistenze, cioè allievi che produranno comunque apparati formali, anche quando non vi sia una richiesta in tal senso?

D.3. Se lo studente accetta di far uso della lingua naturale, su che cosa si concentrerà il suo sforzo? In ogni caso, che cosa produrrà l'allievo?

Uno degli scopi principali di questa ricerca era quello di verificare se, una volta ottenuto che lo studente accettasse di parlare di questioni di matematica in lingua naturale, questo fatto potesse rivelare modelli interni o, per meglio dire, fornire modelli esterni il più possibile vicini a quelli interni, su alcuni argomenti elementari. Si voleva paragonare il modello usualmente proposto dall'insegnante con il modello intuitivo che si crea inconsapevolmente rispetto alle attese degli insegnanti nel progredire del livello scolastico (si vedano [Fischbein et al., 1981], [Fischbein, 1985a, 1985b]). È ovvio che, a seguito di esplicita richiesta da parte dell'insegnante, l'allievo non risponde con il modello intuitivo:

- sia perché a volte non si rende esplicitamente conto della sua esistenza e della differenza di questo rispetto a quello richiesto dall'insegnante
- sia perché ritiene di dover far uso di quello che sa essere atteso dall'insegnante, o che ritiene essere tale.

Sia per tentare di rispondere alle precedenti domande, sia per fare emergere modelli esterni il più possibile vicini al modello intuitivo, abbiamo elaborato 5 testi a carattere problematico, ma senza domande dirette, atti a sollecitare l'allievo ad assumere un compito esplicativo in situazioni diverse, il più possibile esterne alla situazione-classe canonica, invitandolo esplicitamente ad assumere altri ruoli in contesti diversi ed in epoche diverse; di questi 5 testi, solo 2 avrebbero proposto situazioni tipicamente scolastiche nelle quali però l'allievo non era più tale, ma anzi sarebbe stato in qualche modo un docente che si assume il carico di una spiegazione di due concetti elementari: l'area di un rettangolo e le altezze di un triangolo (vedremo in dettaglio tali testi in **3.**).

Ciò pone però altre domande:

D.4. Di fronte all'assunzione di un ruolo diverso da quello di allievo, ruolo che in qualche modo disimpegna lo studente dalla supposta necessità di produrre solo modelli esterni ritenuti attesi, e che suggerisce di non far uso del linguaggio scolastico ma che anzi spinge verso l'uso della lingua naturale, come avrebbe reagito l'allievo? Si sarebbe lasciato prendere nel "gioco di ruoli" creando una sceneggiatura, sentendosi libero di proporre un suo eventuale modello intuitivo, facendo uso della lingua naturale?

D.5. Questa spinta a proporre modelli intuitivi avrebbe rivelato conoscenze profonde pertinenti, o errate, o misconcezioni? Tali modelli sarebbero stati comunque una copia di quelli suggeriti in aula dall'insegnante o riformulazioni autonome, del tutto personali? In tal caso, quanto accettabili e plausibili?

2. Le ipotesi della ricerca.

Una volta poste le precedenti domande **D.i**, le nostre ipotesi di risposta **I.i** erano ordinatamente le seguenti:

I.1. Ritenevamo possibile far sì che almeno qualche studente potesse essere spinto a trattare questioni di matematica usando la lingua naturale, ovviamente creando condizioni opportune. Avevamo ipotizzato che la presenza in aula di ricercatori sconosciuti agli allievi e l'assenza dell'insegnante curricolare fosse una condizione sufficiente ad ottenere, almeno da parte di qualche studente, testi in lingua naturale e non solo risposte formali legate alla clausola e.g.f. Ciò tanto più se si fosse assicurato agli studenti che la prova non era in alcun modo valutativa: a garanzia di ciò potevamo assicurare che gli elaborati non sarebbero stati mostrati all'insegnante e che anzi chi voleva poteva siglare il proprio lavoro con il solo nome o lasciarlo del tutto anonimo. A nostro avviso tutto ciò sarebbe stato sufficiente per far sì che vi fossero per lo meno alcuni testi in lingua naturale e non solo risposte formali alle nostre proposte di lavoro. Come abbiamo già preannunciato, l'idea era quella di spingere a far uso della lingua naturale implicitamente, aiutati dal fatto che la situazione problematica proposta era inserita in un contesto inusuale ed invitando a non rispondere ai nostri inviti l'allievo come tale, ma ad immaginarsi appunto in un altro contesto, più naturale, in un tempo futuro, in situazioni non direttamente didattiche per lui-allievo.

I.2. Ipotizzavamo, tuttavia, che ben pochi allievi avrebbero accettato l'invito. A nostro avviso l'ambiente scuola, il condizionamento, la prassi scolastica (in particolar modo nelle ore di matematica) avrebbero molto limitato il numero di allievi disponibili a far uso della lingua comune, forse per timore di non essere comunque adeguati. Supponevamo infatti che l'invito a scrivere in lingua naturale potesse contrastare con il contratto didattico usuale, creando forse nell'allievo qualche resistenza. In definitiva, ipotizzavamo un grande numero di risposte formali o tendenzialmente tali. Per essere garantiti del fatto che una mancata risposta non fosse dovuta ad ignoranza sull'argomento proposto, decidemmo di scegliere temi ed argomenti estremamente elementari, almeno parzialmente a conoscenza di tutti gli allievi di una seconda media.

I3. Relativamente al tipo di risposte, ipotizzavamo una casistica di produzione dei protocolli in 5 classi distinte:

a) tentativo di convincere il ricercatore (comunque assimilato ad un insegnante) circa le proprie personali competenze: il testo da noi proposto sarebbe stato comunque interpretato come un problema da risolvere e lo studente si sarebbe limitato a presentare una risposta; il nostro testo doveva quindi non essere la proposta di un esercizio da risolvere, ma la descrizione di una situazione possibile, il cui "sfondo" era di natura matematica, per il tema trattato o per la presenza (implicita) di un calcolo;
b) tentativo di spiegare o dimostrare, ma non accettando il ruolo stabilito nel copione proposto, bensì allo scopo di convincere il ricercatore (identificato con un insegnante), imitando il più possibile il suo

linguaggio o quello supposto per lui, in analogia a quello del proprio insegnante;

c) mancanza di spiegazioni e di modelli delle situazioni proposte avrebbero probabilmente prodotto risposte che avrebbero chiamato in causa un "principio di autorità", evitando di dare spiegazioni e di accettare ruoli (ovviamente sarebbe sempre rimasto il dubbio se questo atteggiamento fosse da giustificarsi come indifferenza ed indisponibilità al compito o come esplicitazione dell'immagine personale della matematica e del suo insegnamento);
d) per la restante parte lo studente potesse avere qualche ritegno ad accettare il ruolo, colloquiando dunque in realtà più direttamente con il ricercatore che non con i protagonisti proposti nel testo;
e) accettazione totale del "gioco di ruoli" proposto, con linguaggio adeguato e l'emergere di modelli intuitivi, soprattutto nei due testi **T2** e **T5** specificamente predisposti all'uopo.

I.4. La nostra ipotesi sulla precedente domanda **D.4** (ved. **1.**) è strettamente legata al caso e) della ipotesi **I.3**: supponevamo infatti che pochi allievi (ma non nessuno) avrebbero risposto al nostro invito e ci aspettavamo molto da questa risposta: uso sicuro e non reticente della lingua naturale, copioni di vere e proprie sceneggiature, assunzioni di atteggiamenti significativi da un punto di vista critico, emergere di modelli intuitivi.

I.5. Ipotizzavamo che, in ogni caso, la proposta di modelli intuitivi da parte dello studente avrebbe messo in mostra misconcezioni o errori difficili da rilevare nella prassi scolastica usuale a causa della "doppia difficoltà" di cui abbiamo detto in **1.** e, viceversa, competenze profonde e dunque reali, reintepretazioni personali di concetti matematici. Accanto a questi modelli intuitivi, ovviamente si ipotizzava la proposta di modelli che fossero null'altro che copie di quelli forniti dalla scuola (dall'insegnante o dal libro di testo). Non riuscivamo a far ipotesi circa la maggior significatività degli uni o degli altri, anche se c'era la convinzione che un modello personale desse più garanzia di profondità di assunzione che non uno acquisito in modo esclusivamente scolastico.

Bisogna qui fare esplicitamente una osservazione. Scrivere un testo, per quanto breve, è considerata da molti allievi una immane seccatura o una fatica insopportabile. Essi sono costretti a farlo in più occasioni, per esempio nelle ore di Lettere o dopo una gita scolastica. Dunque, dato che il compito proposto da noi era svincolato dalla usuale prassi didattica, è ovvio che la nostra sollecitazione a scrivere un testo è stata accolta non proprio da tutti gli allievi e più precisamente solo da quegli allievi che presumibilmente appartengono alla categoria di coloro che non considerano una fatica immensa scrivere un testo in lingua. Quando daremo numericamente i risultati delle risposte-tipo, occorre implicitamente tener conto di ciò: ci sembra lecito supporre che tra coloro che non hanno dato una risposta scritta in lingua (cioè che hanno prodotto solo calcoli o addirittura nulla) siano compresi i ragazzi che mal sopportano di scrivere testi in lingua.

3. Metodologia.

Si è operato in classi di seconda media (allievi di 12-13 anni) di Bologna centro, prima periferia e di un paese vicino, classi nelle quali non si attuavano programmi particolarmente innovativi ed i cui insegnanti non sono a contatto con gruppi di ricerca didattica.
Una prima fase della ricerca, fase peraltro a noi usuale, è esclusivamente utilizzata a mo' di "saggio"; i testi elaborati a tavolino vengono forniti ad alcune classi solo per saggiare le risposte e gli atteggiamenti dei ragazzi, raccogliere eventuali dubbi o sollecitazioni varie. Questa pratica si rivela utile soprattutto per la modificazione del testo; se esso non è ben comprensibile, se presenta ambiguità che ad un adulto possono sfuggire ecc., una prima fase di controllo di questo tipo si rivela utilissima. I testi che tra poco presenteremo, dunque, sono quelli finali, dopo prove di saggio fatte a Bologna città ed in un paese a circa 10 km di distanza. I risultati di queste prove non vengono conteggiati ed i protocolli con essi ottenuti non vengono utilizzati nel seguito di questo articolo.

Forniremo ora di seguito i testi proposti agli allievi; essi sono quelli definitivi, risultati delle modifiche apportate dopo le prove "saggio".

T1. Fa' finta di essere un (o una) commerciante...
Una signora ha comperato delle cose ed ha speso 3700 lire; ti ha dato 5000 lire e tu le hai dato il resto giusto. Lei, però, protesta e dice che le dovevi dare 1700 lire. Tu, con calma, le spieghi di avere ragione.

T2. Fa' finta di essere un maestro (o una maestra) delle elementari...
Vuoi spiegare ai tuoi allievi di terza (8 anni) che l'area del rettangolo si trova facendo base per altezza.

T3. Fa' finta di essere un (o una) geometra...
Questa è la piantina di un piccolo appartamento che hai appena disegnato; ma l'acquirente non capisce come farà ad abitare in un appartamento così piccolo da stare su un foglio. Tu gli spieghi per bene che questo è un disegno in scala.

[Segue la pianta di un appartamento in scala, ma senza alcuna indicazione sulla scala; sono invece fornite le misure reali, in metri, ma senza alcuna indicazione sull'unità di misura].

T4. Fa' finta di essere un ferroviere (o una ferroviera) ...
Un signore ti chiede a che velocità media viaggia un certo treno Intercity da Bologna a Milano (220 km), dato che ci mette un'ora e mezza. Tu gli dài la risposta giusta, ma lui dice che è impossibile e vuole che tu gli spieghi come hai fatto a fare i conti.

T5. Fa' finta di essere un papà (o una mamma)...
Il tuo bimbo, che ha 7 anni, ha sentito dire che ogni triangolo ha tre altezze e ti chiede: "Papà (mamma), che cosa vuol dire?". Niente di peggio che eludere la domanda di un bambino piccolo; dunque, decidi di rispondergli.

Osservazioni.

Per prima cosa si noti che, come è già stato detto sopra, ogni testo presenta una situazione problematica ma non vi è mai una domanda esplicita per evitare il più possibile che i ragazzi pensino ad un esercizio da risolvere.
Molti testi proposti sono stati abbondantemente rielaborati fino a raggiungere stesure di grande semplicità con concessioni ad un linguaggio diffuso tra gli adolescenti (si noti, in **T1**, il partitivo "delle cose"; ancora in **T1** il "con calma"; in **T2**, il "*facendo* base per altezza"; in **T3** il "per bene", molto diffuso nel linguaggio bolognese). Ma vi sono casi che ci hanno stupito, come l' "eludere" di **T5** che pensavamo inizialmente destinato ad essere modificato e che invece è stato accettato ed è rimasto fino in fondo,[4] provocando in effetti solo un disagio minimo (come vedremo in **4.5**). Si noti che in **T1** e **T4** si fa riferimento rispettivamente a "il resto giusto" e "la risposta giusta", ma senza dire di quale si tratti e dando per scontato che l'allievo se li sappia calcolare da sé e quindi invitandolo (anche se solo implicitamente) a farlo. In **T4**, nella fase finale, ci siamo accorti che il dato "220 km" tra parentesi, che doveva indicare la distanza ferroviaria tra Bologna e Milano (e che come tale era stato interpretato nelle prove "saggio"), è stato da alcuni allievi interpretato nelle prove finali come la velocità del treno. A parte le ovvie considerazioni (anche nel linguaggio comune si viaggia "ai 100 km", senza indicazione dell'unità di misura temporale, o addirittura "ai 100"), chi volesse riprovare l'esperienza è bene che modifichi il modo di fornire questo dato per non creare problemi.
La prova è stata assegnata in questo modo: a gruppetti di 12-13 (dunque metà classe per volta), i ragazzi venivano condotti in un'apposita aula,

[4] Sulle tecniche di rielaborazione dei testi dei problemi, si veda [AA.VV., 1995], dove è presentata una tecnica molto vicina a quella da noi utilizzata in questo caso.

mentre l'altra metà classe restava nell'aula con il proprio insegnante. Nell'aula della prova i ragazzi venivano distribuiti in modo che non avessero vicini immediati. Tuttavia i testi erano distribuiti in modo tale che, comunque, allievi relativamente vicini avessero testi diversi. L'alternarsi delle mezze classi era fatto in modo tale che non vi fossero contatti di alcun tipo tra chi aveva già prodotto un protocollo e chi si accingeva a farlo. Tutto ciò sempre sotto la diretta sorveglianza di entrambi gli autori di questa ricerca. Ogni ragazzo poteva fare una o al più due prove, a sua scelta, nel tempo che voleva (comunque in non oltre 20 minuti); la consegna era di fare con calma, scrivendo liberamente, meglio se molto su una sola prova, piuttosto che poco su due prove.
In totale abbiamo coinvolto 14 classi per un totale di 278 allievi; 25 allievi hanno voluto eseguire due prove invece di una, dunque sono stati raccolti e considerati validi ai fini della ricerca 303 protocolli distribuiti sui 5 testi, dunque circa 60 per ogni testo.
Ad ogni allievo veniva consegnato un foglio formato A4 sul quale era scritto con il computer uno solo dei 5 testi e fornito di apposito spazio per la formulazione della risposta. Particolare cura è stata posta sul fatto che le fotocopie fossero perfette. Il foglio poteva o meno essere personalizzato con indicazioni di nome cognome e classe. Faceva parte degli accordi che gli elaborati sarebbero stati consegnati direttamente ai ricercatori e non agli insegnanti e che dunque non avessero alcun peso nella valutazione; su ciò abbiamo particolarmente insistito dato che, nelle prove "saggio", in molti casi avevamo notato un forte imbarazzo a scrivere liberamente, proprio a causa di questo timore, quasi paura a lasciarsi andare ed essere sé stessi...

4. Risultati e primi commenti.

Nei paragrafi **4.1**-**4.5** esamineremo in dettaglio ciascuna delle 5 prove ed alcuni suoi esiti, da vari punti di vista. Nel **4.6** faremo un bilancio specifico sul solo problema dei modelli intuitivi e faremo una riserva doverosa sull'interpretazione dei risultati.

4.1 Il testo **T1** è stato affrontato da 58 allievi; circa il 70% crea o tenta di creare un dialogo tra sé stesso (il commerciante) e la cliente; qualcuno propone un dialogo ingegnoso, con botta e risposta. Solo 2 studenti su 58 assumono un atteggiamento "negativo", cioè dànno come risposta solo la sottrazione 5000-3700=1300 senz'altro commento. Gli altri, in un modo o nell'altro, accettano il ruolo proposto nel testo, e qualcuno scrive una vera e propria sceneggiatura.
Da segnalare:

* molti confermano la correttezza del resto dato all'interno della sceneggiatura, proponendo da parte del commerciante la sottrazione detta sopra; ma molti di più preferiscono effettuare la verifica additiva: 1300+3700=5000, segno che il risultato (1300) da noi non esplicitato, è stato calcolato (forse a mente); un allievo propone questa "prova":

5000 -
3700 =

1300 +
3700 =

5000

* 2 allievi fanno il calcolo errato: 5000-3700=2300 e quindi alterano totalmente il senso del testo.
* Molti fanno esplicitamente ricorso alla macchina calcolatrice appellandosi ad essa in quanto commercianti per convicere la signora.
* La signora che non sa fare i conti è spesso definita "una vecchia signora".
* In 2 casi il futuro commerciante si dichiara disposto a lasciar correre e dare alla signora le 400 lire che reclama in più; uno dice espressamente "per non perdere la cliente".
* 4 allievi identificano l'errore della signora con la sua incompetenza matematica cioè con il non sapere modellizzare il problema attraverso una sottrazione; altri 6 con il non sapere eseguire tale operazione.
* Le "cose comperate" diventano in alcune sceneggiature degli oggetti reali; Maurizio, per esempio, fa acquistare 2 ettogrammi di mortadella ed uno di prosciutto cotto e poi inventa una gustosa scenetta in dialogo distinguendo bene i ruoli (il risultato è positivo: non solo la signora si convince alla fine, ma chiede pure scusa...).

4.2 Il testo **T2** è stato affrontato da 61 allievi; anche in questo caso, la stragrande maggioranza dei ragazzi accetta e sta al gioco, fingendo una vera e propria lezione, drammatizzando, quasi tutti facendo disegni "alla lavagna" e creando una lezione ex-cathedra (ci sono soprattutto lezioni frontali, ma sono presenti 2 casi di lezioni dialogate, anche se si tratta solo di stimoli appena accennati e suggerimenti non approfonditi).
Da segnalare:
* in 6 casi l'allievo legge "rettangolo" ma capisce "triangolo"; in 2 di questi casi si disegna davvero e si spiega poi l'area del triangolo, mentre nei 4 restanti casi si chiama triangolo il rettangolo, ma si disegna un rettangolo e si usa la formula: base per altezza.
* Molti ricorrono a quadrettature del rettangolo ed a casi particolari; altri non usano la quadrettatura ma unità di misura (metri o centimetri) e si

limitano ad applicare la ben nota formula; pochissimi sono i tentativi per così dire "continui" (un rullo per dipingere), essendo assai di più quelli "discreti"; c'è anche un allievo che parla di "particine" (una sorta di ingenui "indivisibili" alla Cavalieri) ed un altro di "mattoncini".
* Molti, dopo aver ben impostato il dialogo e realizzato un disegno alla lavagna, poi tendono solo a formalizzare: b sta per "base", h per "altezza", A=bxh ed il loro intervento finisce lì.
* Ci sono alcuni tentativi interessanti di generalizzazione: si fanno cioè uno o al più due casi specifici e poi si suggerisce la formula generale.
* Gli allievi che non accettano il "gioco", giustificano semplicemente l'uso della formula: un allievo arriva esplicitamente addirittura a riproporre la formula con un laconico ed autoritario: "Si fa così e basta"; un altro rassicura i suoi studenti con un: "Lo ha detto un grande matematico"; vi sono alcuni altri casi analoghi, ma non così laconici ed autoritari.
* Ci sono vari ed interessanti tentativi di "dimostrazione"; eccone due riproposti fedelmente:

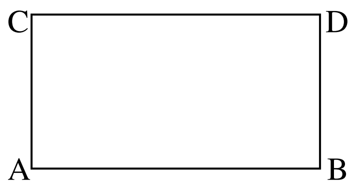
> Il rettangolo è formato da due triangoli rettangoli.
> Si chiamano così perchè hanno un'angolo [sic!] di 90°.
> Dividiamo il rettangolo con una diagonale in 2 parti uguali.
> Siccome la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, per trovare l'area del rettangolo si fa base × altezza.
>
> Prima di tutto per iniziare questa figura geometrica si chiama così perché ha tutti gli angoli di 90° cioè retti.
> I suoi lati sono a 2 a 2 uguali AB e CD e AD e BC.
> Quindi per trovare l'area si fa base x altezza.

(Non c'è alcuna figura e l'allievo non può aver utilizzato un altro foglio; probabilmente ha fatto un disegno sul banco o ha in mente una figura standard desunta dall'esperienza scolastica o dal libro di testo).

Quel che si palesa, e non solo da questi due esempi, bensì da molti altri, è l'uso del "matematichese" da noi definito in [D'Amore, 1994] ed in [D'Amore-Sandri, 1995].[5]
L'immagine della matematica che emerge è quella di una disciplina fatta non di idee significative, ma di un epidermico modo di fare; ciò è provato anche da un altro protocollo:

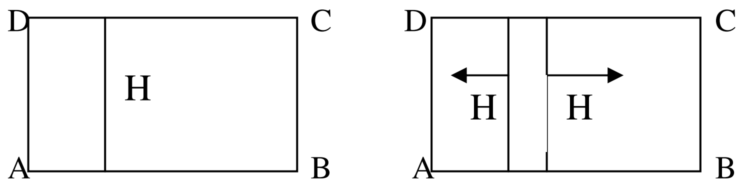
[5] Si tratta, in sostanza, di una coppia formata da lingua ed atteggiamento. La prima è spesso pertinente e fa uso di terminologia tecnica appresa dalle lezioni o dai testi scritti, ma non sempre usata in modo opportuno; l'atteggiamento è il tentativo di imitare l'insegnante nel suo modo di "fare matematica"; spesso manca però la capacità critica di comprendere il "senso" del modo di fare dell'insegnante; e lo studente si limita ad un atteggiamento imitativo piuttosto vuoto e privo di senso.

L'area del rettangolo si trova facendo base per altezza cioè AB per AD



Prima disegno il rettangolo poi scrivo le lettere e l'Ipotesi e dopo inizio a spiegare la regola cioè l'area di un rettangolo si trova facendo base per altezza cioè AB per AD

È evidente che il linguaggio consta di una terminologia pertinente, per quanto povera, fatta di termini e simboli. In ogni caso, l'atteggiamento assunto da diversi allievi ricorda un tentativo di dimostrazione, segno palese del fatto che gli insegnanti di classe hanno tentato di assumere un atteggiamento deduttivo che gli allievi sembrano aver mal assimilato. È evidente che nel contratto didattico s'è inserita anzitempo una "clausola" nuova, che gli allievi cercano di rispettare, concernente un atteggiamenteo (quello dimostrativo, appunto).
* C'è chi confonde del tutto area con perimetro, cercando di giustificare la formula b×h come quella che permette di trovare il perimetro del rettangolo in questione.
* Uno studente si pone il problema di convincere i propri allievi che, mentre normalmente, nella vita di tutti i giorni, le altezze degli oggetti reali si misurano al centro (figura di sinistra), a scuola l'altezza del rettangolo si misura ai lati; ma non c'è da preoccuparsi perché traslando l'altezza verso gli estremi del rettangolo, si trovano proprio i lati (figura di destra):



* Sono quasi del tutto assenti marche che esprimano le unità di misura; vi sono molti casi, ma singolare è quello di Nigel che fa l'esempio numerico di un rettangolo di lati 2 e 3 (senza esprimere l'u.d.m.) e poi cerca di spiegare ai propri allievi il fatto che l'area sia espressa da 62, giustificando quel 2 all'esponente come dovuto al fatto che, in realtà, esso "rappresenta due

misure, l'altezza e la lunghezza"; quanto agli altri modi per indicare le u.d.m. delle aree ottenute, il più diffuso è di esprimere base e altezza in cm, e l'area ancora in cm; su 61 allievi, solo 3 usano in modo appropriato la scrittura cm^2.
* Appare una enorme varietà di termini usati in modo improprio o per facilitarne la comprensione ai piccoli allievi ai quali il testo è rivolto: "ampiezza" per superficie, "lato più lungo" per altezza, "parte al centro" per area, "definire" per misurare ecc.

Questo fingersi un maestro elementare è un ruolo che ha molto colpito nel segno da un punto di vista linguistico e nella produzione di modelli che potrebbero essere assai vicini ai modelli intuitivi, per quanto molto ovvii: quadrettature o piastrellature. Quel che più emerge è il tentativo massicciamente perseguito di "abbassare il livello linguistico", cercando di adattarlo all'età dell'allievo. Lo studio di questo atteggiamento non sembra banale se si vogliono esplorare davvero le reali consapevolezze su questioni matematiche di base. [Su questo punto specifico torneremo in **4.6**].

Se è vero che alcuni studenti si rifugiano nel "matematichese", è anche vero che altri, invece, tentano la creazione di un linguaggio naturale elementare, fatto di allusioni al concreto, esprimendo così proprie problematiche cognitive e rappresentative: questo "gioco" di cambiare livello linguistico si rivela estremamente interessante anche sul piano della rilevazione delle competenze profonde. Ecco un protocollo significativo in tal senso perché privo di aspetti formali e ricco invece di evidenti manifestazioni di bisogni pedagogici:

> Io non credo di essere in grado di far finta di essere un maestro delle elementari, comunque posso sempre provare: c'è sempre una prima volta.
> Innanzitutto se dovessi proprio essere un insegnante, sarei molto spontanea e simpatica, in modo da rendere il dialogo con i miei alunni, semplice e diretto.
> Mi piacerebbe avere un rapporto di amicizia, divertente, infatti se dovessi spiegare come si trova l'area del rettangolo, data la mia golosità in fatto di dolci, immaginerei il rettangolo come una fetta di cioccolato.
> Ci ho provato; ma non ci sono riuscita non sono in grado di spiegare che l'area di un triangolo si trova facendo base per altezza.
> Lascio questo compito agli insegnanti veri e propri.

4.3 Il testo **T3** è stato affrontato da 62 allievi; di questi, abbiamo solo un caso di rifiuto del lavoro. Tuttavia la situazione problematica proposta non sembra essere emotivamente molto coinvolgente. Infatti i casi di creazione

di veri e propri dialoghi costituiscono la percentuale più bassa tra tutte quelle rilevate in questa ricerca e molti se la cavano ribadendo semplicemente che si tratta di un disegno in scala. Sono però circa la metà quelli che spiegano all'acquirente (variamente ribattezzato: "signor Rossi" e simili) che cosa debba intendersi per scala; da queste spiegazioni si evince che tale concetto, in generale, è ben acquisito, anche se, quando vi sono tentativi di dare indicazioni sul valore della scala, si hanno ... sparate notevoli. Lorenzo, per esempio, ipotizza che si tratti di una scala 1 : 10 000 Ciò potrebbe significare che manca un controllo critico anche di nozioni ben acquisite concettualmente. Torneremo su questo punto.
Molti sono gli allievi che suggeriscono, per far capire al cliente l'impossibilità di realizzare disegni in scala 1:1, l'esempio di cartine geografiche e topografiche.
Detto in vari modi, appare diffusa l'idea che la pianta non ha tanto la funzione di rappresentare le dimensioni dell'appartamento, ma piuttosto la dislocazione dei vani; rappresentativo al riguardo è il seguente protocollo:

Ludovico:

> Deve capire che le misure dell'appartamento sono in scala cioè devono essere moltiplicate alla costruzione dell'appartamento. E questo appartamento diventerà molto più grande quando verrà costruito. Non si deve preoccupare per la grandezza ma deve vedere solamente se l'organizzazione dell'appartamento gli va bene.

Interessante è l'uso del termine “moltiplicate” come sinonimo di "ingrandite". Ciò non può non richiamare alla mente alcuni studi sui modelli intuitivi di Fischbein secondo i quali la moltiplicazione aumenta sempre i fattori.

4.4 Il testo **T4** è stato affrontato da 60 allievi; la percentuale degli atteggiamenti negativi è la più alta (10 casi; i 50 restanti danno tutti, anche se con modalità diverse, una soluzione del problema implicito). L'alta percentuale di atteggiamenti negativi è spiegabile: il problema ìnsito nel testo si è rivelato troppo difficile per gli allievi; ad essere rigorosi, sono solo 2 che danno una soluzione accettabile del calcolo della velocità.
Tali 2 soluzioni corrette sono le seguenti:

Cristof:

```
60+30=90    (in minuti 1 ora ½)
(circa) 220:90=2,40     2,4x60 =
                        --------
                           00 +
                         144  =
                        --------
                          144,0
```

(Si noti l'approssimazione di 2,4 a 2,40 a meno che quel "40" non sia invece il resto della divisione 220:90, come appare evidente in altri protocolli)

Tommaso:

Ferroviere = Dunque, da qua a Milano ci sono 220 km, giusto?
Signore = Giusto!
F = E il treno li percorree in 1 ora e mezza, perciò se dividiamo 220 per 1,5 otteniamo il risultato voluto.
S = Mmm ... Sì, penso di sì.
F = Allora 220 diviso 1,5 è uguale a circa centoquarantasei km-h e mezzo
S = Grazie per la cortesia, arrivederci!
F = Arrivederci.

Nel protocollo di Tommaso mancano i calcoli; presumibilmente li ha fatti a mano sul tavolo o con una macchina calcolatrice di nascosto; ottima, comunque, l'approssimazione di 146,6 a "circa centoquarantasei km-h e mezzo"; anche tenuto conto che quello di Tommaso è l'unico protocollo così chiaro in tal senso.
Si noti l'enorme differenza di linguaggio ed atteggiamento tra i protocolli di Cristof e Tommaso. Il primo assume un atteggiamento del tutto formale e fornisce come spiegazione solo calcoli senza commenti; il secondo, viceversa, crea una sceneggiatura all'interno della quale egli stesso è protagonista e, dei calcoli, appaiono solo i risulati finali. Nel caso di Cristof, la clausola e.g.f. del contratto didattico domina la situazione e lo stimolo da noi proposto (nonostante tutte le nostre cautele) è interpretato come semplice problema da risolvere; nel caso di Tommaso, invece, agisce il nostro invito ad immaginarsi al di fuori del mondo scolastico ed il linguaggio naturale prende il sopravvento.

Altre considerazioni.

* Gli errori di calcolo sono moltissimi, così come le strategie risolutive senza senso apparente. Vediamo solo due esempi:

Michele:

220:90=20,44

Così facendo mostra una buona strategia, ma un errore di calcolo non corretto da una valutazione a posteriori del risultato ottenuto (su questo punto torneremo in seguito).

Marzia:

60=2 km
60+20=1 ora e 20
2 km equivalgono ad un ora quindi 220 km sono uguali a 1 ora e 20 minuti

Tale protocollo potrebbe offrire vari appigli. Ma qui sorvoliamo sulla discussione circa errori e misconcezioni che affronteremo semmai in altra occasione.
* Moltissimi assicurano oralmente, nel corso del dialogo, al "signore" che la velocità si trova dividendo spazio per tempo, ma poi, all'atto pratico, non sanno agire di conseguenza, forse per il fatto che appare una frazione di ora o perché 220 non è multiplo di 90.
* Tra le strategie messe in atto, appare ben 9 volte il calcolo "per mezze ore"; cioè 220 è diviso per 3, ricavando la velocità del treno in km/mezz'ora. A questo punto basterebbe moltiplicare per 2 per avere la velocità oraria desiderata; ma sono solo 2 (su quei 9) gli allievi che sembrano tentare di applicare (senza riuscirvi, però) questa parte conclusiva della strategia. Gli altri 7 si perdono o concludono lì.
* Tra i futuri ferrovieri poco propensi nell'impegno con i viaggiatori, c'è chi rinvia al "tabellone degli orari", come se su questo fossero indicate le velocità dei treni.[6] L'idea di Tommaso (220:1,5), in realtà, alberga nella mente di molti... ma sotto forma moltiplicativa; appare infatti in molti casi l'operazione 220×1,5 proposta per calcolare la velocità. Come si spiega? Con la natura del numero razionale 1,5? Pensiamo piuttosto che sia responsabile una certa prassi didattica che insiste in modo formale su questo genere di questioni e facendo sì che quel che a volte resta davvero nel profondo degli allievi è l'aspirazione all'applicazione non troppo consapevole delle formule; ciò spiega anche, a nostro avviso, certe inutili e dannose "riduzioni", per esempio di 1 ora e mezza a 5400 secondi che appare ben 12 volte, segno probabile del fatto che gli allievi hanno eseguito passaggi di questo genere, in passato, ma evidentemente senza consapevolezza di causa. È molto più "sano", per un'acquisizione reale e significativa, imparare ad operare a "braccia", con le mezze ore, con i quarti, con spezzoni di ora,... E poi riaggiustarli nel modo dovuto. In casi di questo genere, sarebbe stato del tutto intuitivo procedere al calcolo della velocità media del treno ogni mezz'ora e poi raddoppiare. Ma questa capacità, come abbiamo visto, non c'è.

[6] Un'attività didattica di lettura di orari, di ideazione di itinerari di viaggio ecc., sarebbe proficua; varrà sul reale apprendimento infinitamente di più di qualsiasi formula v=s/t. Ci è sembrato, anzi, che il volere a tutti i costri ostinarsi a fare uso della nota ma non interiorizzata formula abbia addirittura indotto in errore: il tentativo di applicarla è stato più forte che non quello di ragionare, semmai "a braccia", sulla richiesta.

Di fatto, ci pare di poter concludere che problemi sulla velocità media sembrano fuori dalla portata della stragrande maggioranza degli allievi. Manca inoltre, come abbiamo già visto in **4.3**, la capacità di un controllo critico realistico.[7] Abbiamo treni che, dopo qualche calcolo, viaggiano a 24 km/h ed altri che viaggiano a velocità da jet!

4.5 Il testo **T5** è stato affrontato da 62 allievi; nessuno ha consegnato in bianco o eluso la domanda, anche se in 4 casi non ci sono in realtà delle vere risposte (una sola frase laconica, o un disegno non chiaro). È dunque il testo che più di ogni altro ha visto la partecipazione e la disponibilità a far uso della lingua naturale.
All'analisi, emerge con estrema chiarezza che l'idea di altezza di un triangolo è una faccenda misteriosa che, in molti casi, è confusa con altri concetti; per esempio: * angoli interni del triangolo; * lati del triangolo; * archi di circonferenze che hanno i lati come corde; * prolungamenti esterni dei lati; * incentro, circocentro e baricentro.
Queste posizioni sono non solo molto ben evidenti, ma ribadite con forza ed in percentuale molto alta: facendo la somma di tutti i casi ottenuti, il 55% delle risposte parla d'altro e non di altezze mentre molti dei restanti protocolli che parlano di altezze non sembrano affatto tendere a riconoscerne 3 in un triangolo; c'è in questo senso una tal consapevolezza espressa emblematicamente da un caso nel quale il malcapitato bimbo di 7 anni che ha posto la questione è severamente redarguito dal genitore:

> Non devi credere a tutto quel che ti si dice.

Nonostante sia formulata in lingua naturale, anzi forse proprio per questo, la risposta più pertinente a nostro avviso è quella del seguente protocollo:

Simona:

> Figlio mio, la geometria tu non la conosci però voglio spiegarti che cosa vuol dire altezza. Come te, io, e papà abbiamo un altezza, che si misura dalla testa ai piedi, anche i triangoli ne hanno una, però la loro si misura dal vertice che è un puntino fino alla base che sono come i nostri piedi. Però dato che loro hanno 3 puntini (vertici), hanno tre altezze perché hanno i nostri 3 paia di piedi. E dato che noi abbiamo una sola testa e un sol paio di piedi, abbiamo solo un'altezza.

Simona esce totalmente dal contratto didattico usuale, accetta lo stimolo per quel che veramente offre, "gioca" a far la mamma competente in geometria, totalmente al di fuori dell'ambiente classe, cercando il corretto linguaggio (adatto ad un bambino piccolo), cercando un modello adatto, offrendo forse

[7] Ma questo è un discorso generale per la scuola italiana.

quello da lei stessa utilizzato qualche anno prima per darsi un'immagine mentale della situazione. Il linguaggio usato è la lingua materna comune, la descrizione che ne nasce è di un'efficacia incredibile, la rottura della clausola e.g.f. del contratto didattico è totale. Il suo testo descrive una situazione che la vede attrice protagonista, investita di una carica che in qualche modo sente plausibile. Se anche Simona sentisse l'impulso a rispondere in questo stesso modo all'interno di una situazione di valutazione, per esempio in occasione di un'interrogazione, il contratto didattico non le permetterebbe di esprimersi con questo linguaggio e con questo atteggiamento. Viene addirittura da chiedersi se, a questo livello scolastico, sia da preferire una risposta di questo tipo, così ingenuamente ricca, o una risposta stereotipata, quella attesa dall'insegnante o che lo studente ritiene tale.[8]

Intutile dire che, come al solito, quando il soggetto tenta una spiegazione facendo uso di formalismi o di linguaggi stereotipati al posto della lingua naturale, il risultato è deleterio ed il formalismo prende il sopravvento. Si tratta quasi sempre di formalismo vuoto ed inutile...

La preoccupazione di gran lunga più diffusa è quella di insegnare che altezza si scrive h, ma poi essa è: "La linea equidistante dai lati", per esempio; oppure: "La retta che cade perpendicolarmente nel centro del lato opposto partendo dal punto in cui si incontrano due lati consecutivi"; e simili.

Federico è l'unico che ricorda e descrive una costruzione concreta, presumibilmente vista alle elementari: si appoggia "la base" sul tavolo e si usa il filo a piombo a partire dal vertice "più in alto". Ma ciò sembra avere in lui rinforzato l'idea che vi sia una sola altezza in un triangolo, invece che 3.

Qualche protocollo rivela che l'oggetto della richiesta (in un triangolo vi sono 3 altezze) è fraintesa come segue: vi sono 3 casi possibili per l'altezza di un triangolo; essa può essere interna, esterna o coincidere con un lato. Questo fraintendimento si rivela soprattutto nel protocollo di Anna Chiara, nel quale l'autrice presenta come risposta alla nostra sollecitazione un disegno (peraltro molto ben eseguito) con i 3 casi detti sopra.

Tornando a quanto abbiamo già detto nelle Osservazioni in **3.**, relativamente alla difficoltà di capire il testo, solo 2 allievi evidenziano questo fatto ed uno solo di essi, in particolare, denuncia quell' "eludere" sul quale avevamo inizialmente tanti dubbi.

4.6 I modelli intuitivi: bilancio specifico su questo tema.

Ci sembra da un lato di poter confermare che in molti casi i modelli proposti dagli allievi rappresentino davvero i loro modelli intuitivi; però, dall'altro

[8] Considerazioni su questo punto hanno molto fatto riflettere insegnanti ai quali abbiamo presentato questi risultati.

lato, dobbiamo porre dei limiti e delle riserve doverose a questo riguardo. Da alcuni esempi che abbiamo visto (e da altri qui non riportati) si evince un chiaro sforzo di semplificazione ed un tentativo di adeguare il proprio linguaggio ad un possibile interlocutore o più giovane od inesperto. Questo tentativo evidentemente può modificare il rapporto di analogia tra modello intuitivo e modello proposto dietro nostra sollecitazione. Occorre cioè, nell'interpretare i protocolli ottenuti, prendere criticamente le distanze dalla facile ma non del tutto lecita aspettativa:

modello proposto dall'allievo = modello intuitivo posseduto.

A volte, cose di questo tipo càpitano anche nell'insegnamento; l'insegnante possiede un concetto in modo corretto ma, nel tentativo di spiegarlo ai propri allievi, nello sforzo di comunicare consapevole che il livello di concettualizzazione di chi ascolta è basso, non è raro il caso in cui l'insegnante distorca un po' il concetto stesso o alcuni suoi elementi, per renderli più adeguati alle possibilità e concettuali e linguistiche degli allievi stessi.

Così, un modello corretto in effetti viene comunicato in modo distorto non per incompetenza, ma a causa dello sforzo di adeguarlo o di adeguarne il linguaggio espositivo all'interlocutore che si trova ad un livello di competenza o di capacità linguistica inferiore.

Ora, tutti i nostri test richiedono proprio di comunicare qualche cosa ad interlocutori che, per un motivo o per un altro, si trovano in condizioni di livello inferiore di preparazione per quanto concerne l'oggetto di discorso ed in alcun casi anche di capacità linguistiche. Ciò porta di conseguenza da un lato la cautela critica interpretativa detta sopra, dall'altro la necessità di ulteriori indagini su temi analoghi.

5. Discussione dei risultati in relazione alle domande poste in 1. ed alle ipotesi formulate in 2.

Sulla base dell'analisi dei protocolli e dei risultati visti in 4., si possono trarre le seguenti conclusioni.

C.1. A fronte della nostra ipotesi **I.1** secondo la quale solo pochi allievi avrebbero accettato di far uso della lingua naturale e soprattutto nei casi **T2** e **T5**, questa risposta è stata invece molto più diffusa e spontanea, in tutti i testi. Il gioco del cambio di ruolo (studente - commerciante, studente - maestro, studente - geometra, studente - ferroviere, studente - genitore), si è rivelato molto gradito; da notare la quantità non banale di vere e proprie sceneggiature in tutti i casi.

C.2. Come già detto, molte sono le risposte in lingua naturale; ma la qualità delle risposte e la disponibilità a far uso solo della lingua naturale è in misura ridotta. Chi risponde dapprima in lingua tende a completare poi il proprio protocollo con una risposta formale, spesso vuota o comunque poco confacente al compito. Se si considera il numero di coloro che hanno dato solo una risposta in lingua naturale, allora la nostra ipotesi è confermata. Sembra quasi che vi sia un conflitto: dapprincipio, intuitivamente, la risposta è fornita in lingua naturale, ma poi sembra scattare la clausola e.g.f. ed il ragazzo "completa" la prima risposta, facendo uso di calcoli (non sempre opportuni). D'altra parte questo comportamento era da noi già stato segnalato in [D'Amore-Sandri, 1995].

C.3. La casistica rilevata è quella prevista in **I.3** di **2.**, esattamente in quei termini. Vediamo qualche commento alle diverse posizioni.

a) Non diffuso come noi avevamo invece previsto.
b) Molto diffuso anche se talvolta vi è dapprima un tentativo di far uso della lingua naturale per cui vi è una certa intersezione tra i casi b) e d).
c) Vi sono solo 4 casi espliciti; ma in diversi altri protocolli il "principio di autorità" sembra essere nascosto tra le "pieghe" della risposta; per esempio, nei casi del commerciante e del ferroviere, alcune risposte fanno riferimento alla macchina calcolatrice come fonte di certezza ed all'orario ferroviario nello stesso senso.
d) È di gran lunga il caso più diffuso; la parte formale è sempre successiva a quella in lingua e sembra essere motivata dalla clausola e.g.f. del contratto didattico.
e) Supponevamo fosse un caso raro ma adatto comunque a fornire protocolli esemplari; invece, come abbiamo già detto, il caso è risultato più diffuso del previsto; chi accetta in toto il "gioco", lo fa in maniera divertita ed offre di conseguenza protocolli di grande piacevolezza e simpatia; è vero che ciò accade soprattutto con i testi **T2** e **T5**, come avevamo ipotizzato, ma non esclusivamente né in maniera tanto più accentuata.

C.4. Come abbiamo già detto, gli allievi che rispondono secondo la tipologia e) fanno un uso notevole della lingua naturale immaginando copioni con due personaggi o immaginando monologhi (soprattutto nei casi delle spiegazioni a carattere scolastico sollecitate da **T2** e **T5**). La lingua naturale è usata con una certa padronanza semantica (mentre lo stesso non si può dire della sintassi), e comunque spesso in modo espressivo e talvolta pittoresco: ciò era quanto avevamo in effetti ipotizzato. Inoltre, grazie ai casi in cui c'è disponibilità a non far uso di apparati formali, si rivelano, grazie all'uso della lingua naturale, interessanti modelli che, in alcuni casi e pur con tutti i limiti detti in **4.6**, si possono ragionevolmente pensare come (quanto meno vicini ai) modelli intuitivi.

C5. Tali modelli sono comunque di grande interesse sul piano della verifica degli apprendimenti.
Per esempio modelli additivi in luogo di sottrattivi in **T1**, fatto peraltro già rilevato in [Hart, 1981].
Per esempio questioni legate al significato di altezza di un rettangolo o di area, in **T2**. In particolare perché l'area si esprima in cm^2 invece che in cm sembra dai più essere del tutto ignorato; perché sopra le due lettere A e B a volte ci voglia una soprallineatura: $\overline{AB}$, è un fatto esclusivamente legato alle attese o alle pretese dell'insegnante; ciò comporta una obbligatoria riflessione sull'atteggiamento didattico che l'insegnante di matematica deve avere: vuoti formalismi ed un uso acritico del simbolismo e del linguaggio matematici non sono didatticamente utili ed educativamente rilevanti (sorge il dubbio che siano in qualche modo pertinenti...).
Per esempio, il concetto di scala o di valore di una scala in **T3**.
Per esempio, in **T4**, l'incapacità di far uso della formula v=s/t a fronte della sua evocazione, molto diffusa.
Per esempio, in **T5**, l'ignoranza di una idea di altezza di un triangolo non dipendente dalla orientazione del triangolo dato; ancora più misterioso il fatto che un triangolo abbia 3 altezze.

Grazie all'interpretazione dei modelli proposti dagli allievi ai loro interlocutori si rivelano misconcetti o lacune che riteniamo fossero insospettabili, quanto a diffusione, e non rilevabili con gli usuali mezzi didattici di indagine.
Va anche detto, però, che altri modelli forniscono prove decisive a favore di acquisizioni che sono tali nel profondo e dunque reali. L'immagine delle altezze antropomorfizzate del triangolo in Simona (ved. **4.5**), è in tal senso esemplare.

Dunque, la tecnica del "Fa' finta di essere..." si rivela interessante anche in senso diagnostico, per verificare non solo in negativo, ma anche in positivo, il livello di profondità e di personalizzazione dell'apprendimento di un concetto matematico.
Naturalmente, anche chi fa volentieri uso di lingua naturale e dunque presumibilmente più facilmente presenta modelli vicini a quelli intuitivi, spesso si limita a riproporre copie di modelli evidentemente suggeriti dall'insegnante o dal libro di testo e non del tutto fatti propri.
L'analisi dei protocolli sembra confermare che solo il modello reinventato personalmente sia da considerarsi radicato nel profondo e fatto proprio, tanto da poter essere utilizzato in situazione extra-scolastica con

padronanza. Ma su questo punto non possiamo fornire vere e proprie prove, bensì solo far ricorso ad una nostra sensazione, per quanto profonda. Occorrerebbero, anche su questo punto, ulteriori indagini.

6. Note finali.

Alcune brevi osservazioni didattiche sono state disseminate qua e là, nel corso di precedenti paragrafi, specialmente in **5**. Concludiamo dicendo che, a nostro avviso, compiti in classe di tipo usuale, test, quiz, interrogazioni orali, difficilmente permettono di rivelare le reali competenze profonde su certi argomenti; la costruzione di opportune immagini mentali, favorita dall'estraniamento dal sé (e con accresciuta motivazione) rendono possibile questa indagine. Al di là della nostra ricerca, crediamo che una simile via, quella del "Fa' finta di essere...", sia praticabile anche (mutando molte delle condizioni al contorno, beninteso) da un punto di vista didattico.

Riferimenti bibliografici

[AAVV, 1995] B.D'Amore-D.Franchini-G.Gabellini-M.Mancini-F.Masi-A.Matteucci-N.Pascucci-P.Sandri, La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A, 2, 131-146.

[Boero, 1986] P. Boero, Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 9, 9, 48-93.

[D'Amore, 1995] B. D'Amore, Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico, in: B. Jannamorelli (a cura di), *Insegnamento/Apprendimento della matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*, Atti del I Seminario Internazionale di Didattica della Matematica (Sulmona, marzo 1993), Qualevita ed., Sulmona, 209-224. Ristampato in lingua tedesca su: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 17, 2, 1996, 81-97.

[D'Amore-Sandri, 1995] B. D'Amore - P. Sandri, Les réponsens des élèves aux problèmes de type scolaire standard à une donnée manquante, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 55-94.

[Fischbein et al., 1981] E.Fischbein-D.Tirosh-U.Melamed, Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?, *Educational Studies in Mathematics*, 1981, 12, 491-512.

[Fischbein 1985a] E. Fischbein, Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica, in: L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli-UMI, Bologna 1985, 8-19.

[Fischbein 1985b] E. Fischbein, Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari, in: L. Chini Artusi (a cura di), *cit.*, 122-133.

[Hart 1981] K. Hart (ed.), *Childrens Understanding of Mathematics*, J.Murray, Oxford, 11-16.

[Laborde 1982] C. Laborde, *Langue naturelle et écriture simbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématique*, Thèse, Grenoble: Université J. Fourier.

[Laborde 1995] C. Laborde, Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica?, in: B. Jannamorelli (a cura di), *Lingue e linguaggi nella pratica didattica*, Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica (Sulmona, 30 e 31 marzo e 1 aprile 1995), Qualevita ed., Sulmona. Ristampato su: *La Matematica e la sua didattica*, 2, 1995, 121-135.

[Maier 1989] H. Maier, Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves, *Cahiers de didactique des mathématiques*, 3, 86-118. Ristampato su: *La Matematica e la sua didattica*, 3, 1995, 298-305.

[Zan 1992] R. Zan, Il ruolo del contesto e della domanda nel problema espresso in forma verbale, *La Matematica e la sua didattica*, 2, 38-45.

Gli autori ringraziano i professori Efraim Fischbein e Gérard Vergnaud per i suggerimenti ricevuti e per le osservazioni costruttive nel corso di una prima stesura del presente articolo. Ringraziano inoltre Giorgio T. Bagni, Laura

Giovannoni, Fiorella Giusberti e gli anonimi Referee per la lettura critica e per i consigli costruttivi.